

**ACTIVIDADES DE
PENDIENTES DE 3ESO
MATEMÁTICAS**

TRIMESTRE 2

CURSO 25/26

3. Sucesiones

1 Sucesiones numéricas

- Una **sucesión** es un conjunto infinito de números ordenados que siguen alguna regla.
- Cada uno de estos números se llama **término** y se representa por a_n , donde n es el lugar que ocupa dicho número en la sucesión.
- La fórmula que permite hallar cualquier término de una sucesión se denomina **término general**.

73 Escribe los tres términos siguientes de las sucesiones.

Ejemplo $-1, 3, -5, 7, -9, \dots$ Los tres términos siguientes son: $11, -13, 15$.

a) $2, 6, 18, 54, 162, \dots$

b) $-7, -3, 1, 5, 9, \dots$

74 Escribe los 6 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y todos los demás se obtienen sumando -5 al término anterior.

75 ¿Cuáles son los 8 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es -1 y los demás se obtienen multiplicando el anterior por 4?

76 Escribe el término que falta en las siguientes sucesiones.

Ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{-2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{-8}{15}, \dots, \frac{-32}{23}, \frac{64}{27}, \dots$ En el numerador, cada término se obtiene multiplicando el anterior por -2 , y en el denominador, sumando 4 al anterior. El término que falta es $\frac{16}{19}$.

a) $7, 12, 17, \dots, 27, 32, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots$

c) $1, 4, 9, 16, 25, \dots, 49, 64, \dots$

77 El término general de una sucesión es $a_n = 4n^2 + 5n - 2$. Calcula los términos primero, tercero y décimo.

Como n indica el lugar que ocupa cada término en la sucesión, para hallar el primero sustituimos n por 1; para el tercero, por 3, y para el décimo, por 10.

– Primer término: $a_1 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = \boxed{7}$

– Tercer término: $a_3 = 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 36 + 15 - 2 = \boxed{49}$

– Décimo término: $a_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 2 = 400 + 50 - 2 = \boxed{448}$

78 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones dadas por su término general.

Ejemplo $a_n = n^2 - 2n$. Dando a n los valores desde 1 hasta 4 se obtiene:

$$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \quad a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \quad a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \quad a_4 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

a) $a_n = 5n - 3$

b) $a_n = \frac{1}{4n}$

c) $a_n = (-2)^n$

79 Calcula el término que ocupa el lugar 40 en cada una de las siguientes sucesiones.

Ejemplo $a_n = (10 + n)^2 \Rightarrow a_{40} = (10 + 40)^2 = 50^2 = 2500$

a) $a_n = 6n - 20$

c) $a_n = \frac{1}{2n - 1}$

b) $a_n = (-1)^n$

d) $a_n = (2n - 100)^2$

80 Dada la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{16}, \frac{4}{32}, \frac{5}{64}, \dots$, elige su término general de entre los siguientes.

a) $a_n = \frac{n + 1}{2n}$

b) $a_n = \frac{n + 1}{2^n}$

c) $a_n = \frac{n}{2^n}$

d) $a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$

2 Progresiones aritméticas

- Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior una cantidad fija, llamada **diferencia** (d).
- El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la sucesión.}$$

- La **suma de los n primeros términos** de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

- 81** Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, escribe su diferencia.

Ejemplo $-7, -11, -15, -19, -23, \dots$ Sí, es una progresión aritmética porque se mantiene una diferencia constante entre sus términos: $d = -4$.

a) $5, 10, 20, 40, 80, \dots$

b) $35, 25, 15, 5, -5, \dots$

- 82** Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

Ejemplo $20, 13, 6, -1, -8$ $a_1 = 20, d = 20 - 13 = -7 \Rightarrow a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-7) = 27 - 7n$

a) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

b) $48, 42, 36, 30, 24, \dots$

c) $-9, -7, -5, -3, -1, \dots$

- 83** Halla el término general y los 4 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas a partir de los datos dados.

Ejemplo $a_1 = 2; d = 3$. Sustituimos los datos en la fórmula general:

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8; a_4 = 11$$

a) $a_1 = -11; d = 5$

b) $a_1 = 16; d = -4$

84 Escribe el valor del término indicado de las siguientes sucesiones aritméticas.

Ejemplo $a_1 = 5$, $d = 1$, a_{25} Sustituimos los términos en la fórmula general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
 $a_{25} = 5 + (25 - 1) \cdot 1 = 29$

a) $a_1 = 7$, $d = -3$, a_{40}

b) $a_1 = -8$, $d = 10$, a_{75}

c) $a_1 = -11$, $d = -2$, a_{30}

85 Escribe el término general de una progresión aritmética tal que $a_4 = 9$ y $a_5 = 15$.

86 Halla la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética donde $a_1 = 4$ y $d = 5$.

El término general de la progresión aritmética es: $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5$.

Sustituimos en la fórmula general:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{4 + [4 + 49 \cdot 5]}{2} \cdot 50 = \boxed{6\,325}$$

87 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 5$, $d = 2$

b) $a_1 = 10$, $d = -3$

88 Halla la suma de los 50 primeros números pares.

3 Progresiones geométricas

- Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, llamada **razón** (r). La razón de una progresión geométrica es el cociente entre dos términos consecutivos.

- El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \quad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la progresión.}$$

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

- 89** Indica si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, indica su razón.

Ejemplo 1, -2, 4, -8, 16... Sí, es una progresión geométrica porque se cumple que:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \dots = r = -2$$

a) 4, 12, 36, 72...

b) 2, -2, 2, -2, 2...

c) 3, 6, 9, 12, 15...

- 90** Calcula la razón r y escribe los tres términos siguientes de las progresiones geométricas.

Ejemplo 1, 3, 9, 27, 81... $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = r = 3$. El siguiente término será el resultado de multiplicar 81 por 3, y así sucesivamente. Los términos siguientes son: 243, 729 y 2187.

a) 5, -5, 5, -5, 5...

b) 4, -8, 16, -32, 64...

c) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, ...

91 Halla el término general y los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas a partir de a_1 y r .

Ejemplo: $a_1 = 2, r = 3$: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54$

a) $a_1 = 6, r = 2$

b) $a_1 = -1, r = 5$

c) $a_1 = 7, r = -2$

92 Halla el término general y la suma de los 10 primeros términos de la progresión donde $a_1 = -8$ y $r = -2$.

El término general de la progresión es: $a_n = -8 \cdot (-2)^{n-1}$

La suma de los 10 primeros términos vendrá dada por la expresión general: $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Y sustituyendo los datos:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot (-2) - a_1}{-2 - 1} = \frac{(-8 \cdot (-2)^{10-1}) \cdot (-2) - (-8)}{-3} = \frac{(-8) \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - (-8)}{-3} =$$

$$= \frac{(-8) \cdot (-2)^9 - (-8)}{-3} = [-1\,368]$$

93 Calcula la suma de los 5 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = 4$

b) $a_1 = 2, r = -3$

94 Si el cuarto término de una progresión geométrica es 405 y su razón 3, calcula su primer término y el término general.

4 Sucesiones recurrentes

- Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se obtiene a partir de los anteriores.
- Las progresiones aritméticas y geométricas son sucesiones recurrentes.

95 De una sucesión se conocen $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ y $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$. ¿Es una sucesión recurrente? Calcula los 5 primeros términos.

Observando la expresión del término general se deduce que cada término se obtiene a partir de los dos anteriores. Por tanto, es una sucesión recurrente.

Los dos primeros términos se conocen, y los otros tres se calculan a partir del término general:

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + a_1 = 2 \cdot (-1) + 3 = \boxed{1}$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + a_2 = 2 \cdot 1 + (-1) = \boxed{1}$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + a_3 = 2 \cdot 1 + 1 = \boxed{3}$$

96 En una sucesión, el primer término es 8, y los demás se calculan sumando 6 al término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es? ¿Cuáles son sus 5 primeros términos?

97 Escribe los 5 primeros términos de una sucesión en la que el primer término es 2 y los demás se obtienen multiplicando por -5 el término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es?

98 Halla los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

99 Calcula los 5 primeros términos de una sucesión en la que $a_1 = 2$, $a_2 = -3$ y $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$.

**COMPRUEBA LO QUE
HAS APRENDIDO****3. Sucesiones**

- 1 Escribe los tres primeros términos de la sucesión $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.

- 2 Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, y escribe su término general.
 - a) 5, 10, 15, 20...

 - b) 5, 10, 20, 40...

- 3 Determina el término general que define los números naturales (1, 2, 3, 4...) y calcula la suma de los 100 primeros. ¿Es una sucesión aritmética?

- 4 Si el octavo término de una progresión aritmética es 15 y su diferencia es 3, calcula el primer término de la sucesión y el término general.

- 5 Escribe el término general de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$. Determina los 5 primeros términos de esta progresión.





ÁLGEBRA

El álgebra es la parte de la matemática que se ocupa de expresar en términos matemáticos frases del lenguaje cotidiano, obteniendo así expresiones algebraicas.

Con estas expresiones, en particular con las ecuaciones, se pueden resolver problemas que de forma aritmética resultan muy laboriosos. Partiendo de un valor desconocido que se denomina normalmente con la letra x (incógnita) y combinándolo con los datos que ofrece el enunciado del problema se plantea una ecuación, cuya solución es a veces la solución del problema, y otras, el dato necesario para obtenerla.

¿Qué vas a aprender?

- A utilizar los procedimientos básicos para sumar, restar o multiplicar polinomios con una incógnita.
- A identificar y desarrollar las identidades notables.
- A resolver ecuaciones de primero y segundo grado.
- A utilizar los métodos de sustitución y reducción para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- A resolver problemas utilizando en sus planteamientos ecuaciones o sistemas y a interpretar las soluciones obtenidas.

4. Polinomios

1 Expresiones algebraicas. Valor numérico

- Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Las letras de una expresión algebraica se llaman **variables**.
- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

100 Escribe la expresión algebraica que indica la diferencia entre la edad de dos personas. Calcula después el valor numérico de esa diferencia cuando las edades son 45 y 29 años.

Si a es la edad de una persona, y b , la edad de la otra, la diferencia entre sus edades viene dada por la expresión $a - b$.

Si a es 45, y b , 29, entonces, el valor numérico de $a - b$ es: $45 - 29 = 16$.

101 Escribe la expresión algebraica que exprese el significado de las frases siguientes.

Ejemplo "Si Jaime tiene x euros, insuficientes para comprar un CD de 25 euros, indica cuánto dinero le falta." Le faltan $25 - x$ euros.

a) El precio de 7 bolígrafos si cada uno cuesta c euros.

b) El triple de una cantidad, y , reducida en 6 unidades.

c) El cuadrado de un número, b , más su mitad.

102 Escribe posibles frases que estén representadas por las siguientes expresiones algebraicas.

Ejemplo $x^2 - 2x$ El cuadrado de un número, menos su doble.

a) $a^3 + a^2 + a$

b) $b^2 - 3b - 4$

c) $x \cdot y + x^2 + y^2$

d) $x \cdot y \cdot z - 2x - 2y - 2z$

- 103** Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas para los valores de las variables indicados en cada caso.

Ejemplo: $3a - a^2b + 5ab^2 - 2a^3 + b^3 + 1$ para $a = -1$ y $b = 2$

$$3(-1) - (-1)^2 \cdot 2 + 5(-1) \cdot 2^2 - 2(-1)^3 + 2^3 + 1 = -3 - 2 - 20 + 2 + 8 + 1 = -14$$

a) $5a + 3b - ab$ si $a = -3$ y $b = -4$

b) $\frac{3y^2z}{2a}$ si $a = 3$, $y = 2$ y $z = -5$

c) $2 - y^2 + 5x^2$ si $y = 3$ y $x = -2$

- 104** Calcula el valor numérico del polinomio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Cómo son los resultados obtenidos?

- 105** Laura tiene una colección de n sellos, y Javier, otra con la mitad de sellos que Laura. ¿Qué expresión permite calcular la cantidad de sellos que tienen entre los dos? ¿Cuántos sellos tienen si $n = 250$?

- 106** La expresión $2a + 3b + c$ tiene el valor numérico de 6 cuando $a = 1$ y $b = 1$. ¿Cuánto vale c en este caso?

- 107** Un acertijo dice lo siguiente: "Piensa un número, multiplícalo por tres, suma al resultado 5, resta el doble del número inicial al resultado, resta 4 a ese resultado y resta de nuevo el número inicial al resultado". ¿Por qué el resultado final es siempre 1?

2 Monomios. Suma y resta

- Un monomio es una expresión del tipo $a \cdot x^n$.
- Monomios semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal.
- La suma o resta de dos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos cuyo coeficiente es la suma o resta de los coeficientes que se operan. Solo se pueden sumar y restar los monomios semejantes.

Coeficiente
 $\uparrow$
 $a \cdot x^n$
 Parte literal Grado

108 Realiza las siguientes operaciones de monomios.

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3$

b) $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4$

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3 = (1 - 12 + 8 + 5)b^3 = \boxed{2b^3}$

b) $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4 = \left(2 - 3 + \frac{1}{2}\right)a^4 = \left(\frac{4}{2} - \frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)a^4 = \boxed{-\frac{1}{2}a^4}$

109 Realiza la operación indicada en los casos que sea posible.

Ejemplo $3y^2 + 4y^3$: no se puede porque los monomios no tienen la misma parte literal.

a) $6z - \frac{3}{4}z =$

b) $\frac{1}{2}y^3 + 4x^3 =$

c) $6a^2 - 2a =$

d) $9b^6 + 5b^6 =$

110 Calcula el monomio que se obtiene en las siguientes sumas y restas.

Ejemplo $7c^5 - \frac{3}{4}c^5 + c^5 = \left(7 - \frac{3}{4} + 1\right)c^5 = \left(\frac{28 - 3 + 4}{4}\right)c^5 = \frac{29}{4}c^5$

a) $2a^8 - 9a^8 - 4a^8 =$

b) $\frac{2}{3}z^2 + 4z^2 =$

c) $x - \frac{3}{8}x =$

3 Multiplicación y división de monomios

- La multiplicación o división de monomios se realiza multiplicando o dividiendo por separado los coeficientes y la parte literal. No es necesario que los monomios que se multiplican o dividen sean semejantes.

- Conviene recordar las dos propiedades de las potencias que aparecen en estas operaciones:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

111 Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4$

b) $\frac{-20c^3}{4c}$

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4 = \frac{-2 \cdot 3}{6}y^{3+2+4} = -1y^9 = \boxed{-y^9}$

b) $\frac{-20c^3}{4c} = \frac{-20}{4}c^{3-1} = \boxed{-5c^2}$

112 Une mediante flechas los productos de monomios que dan el mismo resultado.

Ejemplo $x^2 - 2x$ El cuadrado de un número menos su doble.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2\right) \cdot 6a^3$	I. $(-a^2) \cdot (-6a^2)$
b) $(-3a^4) \cdot (-2a^2)$	II. $\left(\frac{4}{3}a^4\right) \cdot \left(\frac{9}{2}a^3\right)$
c) $\left(\frac{3}{4}a^3\right) \cdot (8a^6)$	III. $(6a) \cdot a^5$
d) $(2a^5) \cdot (3a^2)$	IV. $(3a^4) \cdot a$

113 Realiza las siguientes divisiones de monomios.

Ejemplo $\frac{b^4}{7b^3} = \frac{1}{7}b^{4-3} = \frac{1}{7}b$

a) $\frac{40z^6}{8z^4} =$

c) $\frac{-36b^8}{3b} =$

b) $\frac{18y^9}{-6y^4} =$

d) $\frac{-2c^3}{-5c^2} =$

4 Polinomios: grado y orden

- Un polinomio es la expresión algebraica formada por varios monomios no semejantes:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

Cada uno de los monomios se llama **término**.

- Los números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son los **coeficientes**, y x , la variable. El término que no tiene variable es el **término independiente**.
- Cuando los términos de un polinomio se escriben en orden decreciente de sus grados se dice que el polinomio está **ordenado**. El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que está elevada la variable.

114 Identifica el término independiente y el grado del siguiente polinomio y di si está ordenado.

$$5x^3 - 3 - 2x^4 + 9x + x$$

El término independiente es -3 , y el grado, 4 .

El polinomio no está ordenado, porque los exponentes de los términos en x no están ordenados de forma decreciente.

115 Completa la tabla siguiente.

Polinomio	Grado	Coeficiente del término de mayor grado	Término independiente	Ordenado
$3x^2 + x - x^5 + 9$	5	-1	9	NO
$6x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x + 2$				
$7 + 4x - 3x^2 - x^3$				
$\frac{4}{3}x^6 - 2x^4 + \frac{2}{9}x^2$				

116 Escribe dos polinomios que cumplan las siguientes características.

Ejemplo Un polinomio de grado 5 que tenga el coeficiente del término de mayor grado igual a -2 :

$$-2x^5 + 4x^3 - 9x + 6 + x^2$$

a) Un polinomio ordenado de grado 3 con el término independiente igual a 1.

b) Un polinomio de cuatro términos ordenado sin término independiente y de grado 5.

5 Suma y resta de polinomios

La suma o resta de polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes, es decir, los que tienen la misma parte literal.

- 117** Dados los polinomios $A(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2}$ y $B(x) = 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3$, calcula las expresiones $A(x) + B(x)$ y $B(x) - A(x)$.

Primero expresamos los polinomios de forma ordenada, y luego procedemos a operar teniendo en cuenta los criterios establecidos.

$$\begin{aligned} a) A(x) + B(x) &= 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2} + 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3 = -x^4 + (1-2) \cdot x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) \cdot x + \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2}\right) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) \cdot x + \left(\frac{2}{2} - \frac{5}{2}\right) = \boxed{-x^4 - x^3 + 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B(x) - A(x) &= -x^4 - 2x^3 + \frac{3}{8}x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right) = -x^4 + (-2-1)x^3 - 3x^2 + \\ &+ \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)x + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \boxed{-x^4 - 3x^3 - 3x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{2}} \end{aligned}$$

- 118** Calcula la suma de los polinomios $A(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 6 - x$ y $B(x) = 4x^3 + 7x - 2x^2 + x^4 - 9$.

- 119** Halla $P(x) - Q(x)$, siendo $P(x) = 4x + 7x^2 - x^3 - 3$ y $Q(x) = 2 + 5x - 2x^3 - x^4$.

- 120** Realiza la siguiente operación.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo } (2x^3 - 5x^2 - 3x) - \left(4x^3 - \frac{1}{2}x + 7\right) &= 2x^3 - 5x^2 - 3x - 4x^3 + \frac{1}{2}x - 7 = \\ &= (2-4)x^3 - 5x^2 + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 + \left(-\frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 - \frac{5}{2}x - 7 \end{aligned}$$

$$a) (6x - 4x^3 + 2) + \left(3x - \frac{1}{2} + 2x^2 + 5x^3\right) =$$

6 Multiplicación de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por todos los términos del otro.

121 Calcula el producto de los polinomios $P(x) = 3x - x^2$ y $Q(x) = 2x^4 - 6x + 5x^2 + 2$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3x - x^2) \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) = 3x \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) - x^2 \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) = \\ &= 6x^5 - 18x^2 + 15x^3 + 6x - 2x^6 + 6x^3 - 5x^4 - 2x^2 = \boxed{-2x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 21x^3 - 20x^2 + 6x} \end{aligned}$$

122 Dado el polinomio $A(x) = 3x - 2 + x^3 - 7x^4$, realiza los siguientes cálculos.

Ejemplo $(-8x^3) \cdot A(x) = -8x^3 \cdot (3x - 2 + x^3 - 7x^4) = -24x^4 + 16x^3 - 8x^6 + 56x^7$

a) $(-6) \cdot A(x) =$

b) $2x^2 \cdot A(x) =$

c) $(-5x^4) \cdot A(x) =$

123 Calcula el producto de los polinomios $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ y $Q(x) = 2x - 5$. ¿Qué grado tiene el polinomio resultante?

124 Halla los siguientes productos.

Ejemplo $(3x^2 - 4) \cdot (9x^3 + 5x - 6) = 3x^2 \cdot (9x^3 + 5x - 6) - 4 \cdot (9x^3 + 5x - 6) =$
 $= 27x^5 + 15x^3 - 18x^2 - 36x^3 - 20x + 24 = 27x^5 - 21x^3 - 18x^2 - 20x + 24$

a) $(2x + x^2 - 5x^3) \cdot (6 - x) =$

b) $(7x^4 - 6x^2 + 3) \cdot (2x + x^3) =$

7 Potencia de un polinomio. Identidades notables

• Para calcular la potencia de un polinomio, se multiplica este por sí mismo tantas veces como indique el exponente: $[P(x)]^n = P(x) \cdot P(x) \cdot \dots \cdot P(x)$ (n veces).

• Hay unos casos muy utilizados que se denominan identidades notables:

– Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

– Cuadrado de una resta: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

– Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

125 Calcula el cubo del polinomio $x^2 - 3x$.

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x)^3 &= [(x^2 - 3x) \cdot (x^2 - 3x)] \cdot (x^2 - 3x) = (x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2) \cdot (x^2 - 3x) = \\ &= (x^4 - 6x^3 + 9x^2) \cdot (x^2 - 3x) = x^6 - 3x^5 - 6x^5 + 18x^4 + 9x^4 - 27x^3 = \boxed{x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 27x^3}\end{aligned}$$

126 Expresa en forma de potencia los siguientes productos de polinomios.

Ejemplo $(6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) \cdot (6x^2 + 3x - 2) = (6x^2 + 3x - 2)^4$

a) $(2x + 5x^2) \cdot (2x + 5x^2) \cdot (2x + 5x^2) =$

b) $(4x^3 - 2x^2 + 1) \cdot (4x^3 - 2x^2 + 1) =$

c) $(3 - x + 5x^2 + 2x^3) \cdot (3 - x + 5x^2 + 2x^3) =$

127 Halla las siguientes potencias de polinomios.

Ejemplo $(2x + 3x^2 - 1)^2 = (2x + 3x^2 - 1) \cdot (2x + 3x^2 - 1) =$
 $= 4x^2 + 6x^3 - 2x + 6x^3 + 9x^4 - 3x^2 - 2x - 3x^2 + 1 = 9x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

a) $(3 + x + x^2)^2 =$

b) $(x + 2)^3 =$

c) $(2x^2 - 5x + 1)^2 =$

128 Asocia cada producto con el tipo de identidad notable que le corresponde.

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$	
b) $(2x^3 + 3x) \cdot (2x^3 + 3x)$	I. $(a + b)^2$
c) $(5x - 4) \cdot (5x + 4)$	
d) $(x - 9) \cdot (x - 9)$	II. $(a - b)^2$
e) $(x^2 - x) \cdot (x^2 - x)$	
f) $(7x + 2) \cdot (7x + 2)$	III. $(a + b) \cdot (a - b)$

129 Aplica las identidades notables para calcular las siguientes expresiones.

Ejemplo $(3x - 4x^2)^2 = (3x)^2 + (4x^2)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4x^2 = 9x^2 + 16x^4 - 24x^3$

a) $(6x + 2)^2 =$

b) $(5 - 8x^2) \cdot (5 + 8x^2) =$

c) $(x - x^3)^2 =$

130 Completa el término que falta en las siguientes identidades.

Ejemplo $(5x^3 + 3x) \cdot (5x^3 - 3x) = 25x^6 - 9x^2$

a) $(4x - 1)^2 = 16x^2 + 1 - \dots\dots\dots$

b) $(5x^2 + 6)^2 = 25x^4 + \dots\dots\dots + 60x^2$

c) $(9 - 7x) \cdot (9 + 7x) = \dots\dots\dots - 49x^2$

131 Sustituye los cuadrados por los signos + o - según corresponda.

Ejemplo $(8x + 3) \cdot (8x - 3) = 64x^2 \square 3 \Rightarrow (8x + 3) \cdot (8x - 3) = 64x^2 - 3$

a) $(x^2 + 4x)^2 = x^2 + 16x \square 8x^3$

b) $(5x - x^3) \cdot (5x + x^3) = 25x^2 \square x^6$

c) $(8x^4 - 2)^2 = 64x^8 \square 4 \square 32x^4$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

4. Polinomios

1 Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas en los valores que se indican

a) $3a^2 + 5ab - b^2$ para $a = -1$, $b = 2$

b) $2xy - x^2y^2 + 5$ para $x = 3$, $y = -2$

2 Realiza las siguientes operaciones con monomios.

a) $7c^3 - 3c^3 + 9c^3 =$

b) $(-8z^2) \cdot \left(\frac{6}{5}z^4\right) =$

c) $\frac{-16y^6}{2y^3} =$

3 Dados los polinomios $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 8x + 3$, $Q(x) = 5 + 2x^2 - x^3 + 2x^4$ y $R(x) = x^2 - 2$, calcula las siguientes expresiones.

a) $P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) + Q(x) =$

c) $Q(x) \cdot R(x) =$

4 Aplica las fórmulas de las identidades notables para obtener las expresiones siguientes.

a) $(4 + 3x) \cdot (4 - 3x) =$

b) $(2x - x^2)^2 =$

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

1 Ecuaciones de primer grado. Resolución

- Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad del tipo $a \cdot x + b = c$ que solo es cierta para determinados valores de la incógnita. Estos valores son las soluciones de las ecuaciones.
- Resolver una ecuación es hallar su solución. Para ello:
 - 1.º Se quitan los paréntesis.
 - 2.º Se quitan los denominadores.
 - 3.º Se agrupan términos que tienen incógnita en un miembro y los independientes en el otro.
 - 4.º Se suman o restan los términos de cada miembro de la ecuación.
 - 5.º Se despeja la incógnita.

132 Resuelve la ecuación $2 \cdot (3 - x) - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - (2x - 3)$

1.º Quitamos los paréntesis: $6 - 2x - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - 2x + 3$

2.º Quitamos denominadores: $\frac{36}{6} - \frac{12x}{6} - \frac{16x + 4}{6} = \frac{3 + 3x}{6} - \frac{12x}{6} + \frac{18}{6} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 36 - 12x - 16x - 4 = 3 + 3x - 12x + 18$

3.º Agrupamos los términos que llevan x: $-12x - 16x - 3x + 12x = 3 + 18 - 36 + 4$

4.º Sumamos los términos de cada miembro de la ecuación: $-19x = -11$

5.º Despejamos la incógnita: $x = \frac{-11}{-19} = \boxed{\frac{11}{19}}$

133 Estudia si los valores indicados son soluciones de las ecuaciones.

Ejemplo $2x + 5 = 3 - (6 + x)$ $x = 2$

Sustituimos el valor dado en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad.

$\left. \begin{array}{l} 1.^\circ \text{ miembro } 2 \cdot 2 + 5 = 9 \\ 2.^\circ \text{ miembro } 3 - (6 + 2) = -5 \end{array} \right\} \text{ Como los valores no son iguales, no es solución.}$

a) $2(x + 1) - 3 = 4x + 9$ $x = -5$

b) $\frac{x + 4}{2} = 2 - x$ $x = 0$

- 134 Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se ha obtenido la igualdad $-3x = 4$. Solo falta despejar x . Indica cuáles de las siguientes opciones son correctas.

a) $x = \frac{4}{-3}$

b) $x = \frac{4}{3}$

c) $x = -\frac{4}{3}$

- 135 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución obtenida.

Ejemplo $2 - x + 4x = 8x + 12$
 $-x + 4x - 8x = 12 - 2$

$$-5x = 10 = x \Rightarrow \frac{10}{-5} = -2$$

Comprobamos si es solución sustituyendo el valor obtenido en la ecuación inicial.

$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ miembro } 2 - (-2) + 4 \cdot (-2) = 2 + 2 - 8 = -4 \\ 2.^{\text{o}} \text{ miembro } 8 \cdot (-2) + 12 = -16 + 12 = -4 \end{array} \right\} \text{ Como los dos miembros de la ecuación son iguales, la solución es correcta.}$$

a) $5x - 4 = 3x + 2$

b) $x - 9 = 6x + 4 = 0$

c) $4x - 10 + 3x = 5 + 9x - 7 - x$

d) $8 - x + 7 = 3x + 15$

136 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado en las que aparecen paréntesis.

Ejemplo $3 \cdot (1 - x) + 2x - 5 = 7x - (4x + 2) - 6$

$$3 - 3x + 2x - 5 = 7x - 4x - 2 - 6$$

$$-3x + 2x - 7x + 4x = -2 - 6 - 3 + 5$$

$$-4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

a) $10 + (5x - 6) - 4x = 2 - (3x - 1)$

b) $8 - 2(x + 4) + 9x = 5x + 3(1 - 2x)$

c) $1 - 5x + 4(2 - x) = 9 - (1 - 7x) - 2(x + 4)$

137 Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

Ejemplo $\frac{x+5}{(4)} = \frac{2-3x}{(6)} \rightarrow \text{m.c.m. } (4, 6) = 12$

$$\frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(2-3x)}{12} \Rightarrow 3x + 15 = 4 - 6x$$

$$3x + 6x = 4 - 15 \Rightarrow 9x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{9}$$

a) $\frac{4x-1}{3} = \frac{2-6x}{5}$

b) $\frac{9-6x}{8} = \frac{3+2x}{4}$

138 Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo: $\frac{2-x}{6} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{12} - \frac{x-1}{3}$

$$\frac{4-2x}{12} - \frac{12x-18}{12} = \frac{7}{12} - \frac{4x-4}{12} \Rightarrow 4-2x-12x+18 = 7-4x+4$$

$$-2x-12x+4x = 7+4-4-18 \Rightarrow -10x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-10} = \frac{11}{10}$$

a) $\frac{2x+4}{3} + \frac{1-x}{5} = \frac{x}{15}$

b) $\frac{1-2x}{9} + \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} = 0$

c) $\frac{3(x-2)}{10} - \frac{2x+1}{5} = \frac{7}{2}$

d) $2(3+2x) - \frac{6x+5}{4} = \frac{3x-7}{2}$

2 Problemas de ecuaciones de primer grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de primer grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

- 1.º Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.
- 2.º Plantear una ecuación.
- 3.º Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

- 139** La mitad de las unidades de matemáticas de un libro de texto son de aritmética y álgebra. Los $\frac{2}{3}$ del resto se dedican a geometría, y las dos últimas unidades, a estadística y probabilidad. ¿Cuántas unidades tiene el libro?

Unidades del libro: x , que es la incógnita.

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2}$

Unidades de geometría: quedan $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ unidades $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$ unidades de geometría

Unidades de estadística y probabilidad: 2.

El total de unidades se obtiene sumando las unidades de cada tipo $\Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2$

Resolvemos la ecuación: $\frac{6x}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{12}{6} \Rightarrow 6x = 3x + 2x + 12$

$$6x - 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = \boxed{12 \text{ unidades tiene el libro}}$$

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Unidades de geometría: quedan: $12 - 6 = 6$ unidades $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

Unidades de estadística y probabilidad son las 2 que ya establecía el enunciado.

- 140** El precio de un pantalón es el doble que el de una camiseta. Si entre los dos cuestan 54 euros, ¿cuál es el precio de cada uno de ellos?

- 141** En un centro escolar, el número de alumnas de 3.º de Educación Secundaria excede en 20 al número de alumnos. Si entre todos hay 120 alumnos, ¿cuántas chicas y cuántos chicos hay en dicho curso?

142 La diferencia entre un número y los $\frac{3}{8}$ del mismo es 510. ¿De qué número se trata?

143 Se quiere enmarcar una fotografía de forma rectangular cuyo ancho es 7 centímetros menor que el largo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del marco si el perímetro de la foto es de 66 centímetros?



144 En su cumpleaños, Julia reunió una cantidad de dinero con la que se compró algunas cosas. La mitad la gastó en ropa; los $\frac{2}{5}$, en un libro y dos CD, y aún le quedan 14 euros. ¿Cuánto dinero recibió Julia en su cumpleaños?

145 Un programa de televisión dedica las $\frac{3}{4}$ partes del tiempo a reportajes y entrevistas. La tercera parte del tiempo restante es para publicidad, y los 30 minutos que quedan, para actuaciones musicales. ¿Cuánto tiempo dedica a publicidad?

3 Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado es aquella en la que la incógnita se encuentra elevada al cuadrado.
- Su forma general es: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b , c son números, llamados **coeficientes**.
- Las ecuaciones de segundo grado tienen dos, una o ninguna solución real.

146 Escribe en su forma general las ecuaciones e identifica el valor de los coeficientes a , b y c .

Ejemplo $x^2 + 3x = 12 - 5x$

$$x^2 + 3x - 12 + 5x = 0$$

$$x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 8; c = -12$$

a) $x^2 + 5x + 14 - 2x^2 = 10$

b) $x^2 + 6x + 6 = x + 6$

147 Indica si las siguientes ecuaciones son de segundo grado o no.

Ejemplo $x^3 + x^2 = x^3 - x^2$

Pasamos los términos en x al primer miembro y operamos: $x^3 + x^2 - x^3 + x^2 \Rightarrow 0 = 2x^2 = 0$

Por tanto, sí es una ecuación de segundo grado.

a) $2x - 3x^2 = 5$

b) $7x + x^2 = 5 + x^2$

c) $8 - 2x = x^2$

148 Comprueba que $x = -5$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Sustituimos los valores dados en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad:

$$x = -5 \Rightarrow (-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0 \Rightarrow \text{Es solución.}$$

$$x = 3 \Rightarrow 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0 \Rightarrow \text{Es solución.}$$

149 Comprueba si son soluciones de cada una de las ecuaciones los valores dados.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

$x = 1$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$x = -1$

c) $x^2 - 3x + 3 = 0$

$x = 2$

4 Ecuaciones incompletas de segundo grado

Una ecuación de segundo grado incompleta es aquella que o no tiene término independiente ($c = 0$), o no tiene término en x ($b = 0$), o ninguno de los dos.

150 Determina cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas.

a) $4x^2 + 2x = 0$ b) $5 + x + x^2 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$ d) $3x + x^2 - 5 = 0$

Es incompleta la ecuación del apartado a porque no tiene término independiente, y la del c porque no tiene término en x .

151 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas sin término en x .

Ejemplo $3x^2 - 63 = 300$

Despejamos x^2 y resolvemos la ecuación, que tendrá dos valores correspondientes a la raíz, uno positivo y otro negativo: $3x^2 = 363 \Rightarrow x^2 = \frac{363}{3} = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11$

a) $x^2 - 36 = 0$

c) $4x^2 - 100 = 44$

b) $x^2 + 2x - 7 = 2x + 9$

d) $2x^2 + 5 = x^2 + 9$

152 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas en las que no hay término independiente.

Ejemplo $3x^2 + 21x = 0$ Sacamos factor común a la x . Para que se cumpla la igualdad $x = 0$ o el paréntesis igual a cero. Despejamos el valor de x del paréntesis para obtener la segunda solución de la ecuación.

$$x \cdot (3x + 21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 21 = 0 \Rightarrow x = -\frac{21}{3} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

a) $x^2 - 5x = 0$

c) $5x^2 = 35x$

b) $7x - x^2 = 0$

d) $3x^2 = 5x + x^2$

5 Ecuaciones completas de segundo grado

- Dada una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, sin ninguno de sus coeficientes igual a cero, entonces se dice que es una **ecuación de segundo grado completa**.
- Sus soluciones vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

153 Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x = 2x + 42$.

Escribimos la ecuación en su forma general: $x^2 + 3x - 2x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$

Los coeficientes son: $a = 1$; $b = 1$; $c = -42$.

Aplicamos la fórmula para determinar las dos soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + 13}{2} = [6] \\ x = \frac{-1 - 13}{2} = [-7] \end{cases}$$

154 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 + 8x + 7 = 0$

d) $2x^2 - 2x - 40 = 0$

155 Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 8 = 6x$

Expresamos la ecuación en su forma general pasando al primer miembro el término en x y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2}{2} = 4 \\ x = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 - 9x = -18$

c) $3x^2 + 9x = 120$

156 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 10x = 4x - 5$

Operamos para expresar en forma general la ecuación y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 + 10x - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-6+4}{2} = -1 \\ x = \frac{-6-4}{2} = -5 \end{cases}$$

a) $x^2 + 5x - 4 = 10$

b) $2x^2 + 2x + 8 = 20x - 20$

6 Problemas con ecuaciones de segundo grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de segundo grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

- 1.º Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.
- 2.º Plantear una ecuación.
- 3.º Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

157 Halla dos números impares, positivos, consecutivos, cuyo producto sea 195.

Un número impar lo representamos como $2x + 1$. El número impar consecutivo será dos unidades mayor que este, es decir: $2x + 3$.

Planteamos la ecuación y la resolvemos: $(2x + 1) \cdot (2x + 3) = 195$

$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 4x^2 + 8x + 3 = 195 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 192 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-192)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 3072}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{3136}}{8} = \frac{-8 \pm 56}{8} \begin{cases} x = \frac{-8 + 56}{8} = 6 \\ x = \frac{-8 - 56}{8} = -8 \end{cases}$$

Como los números tienen que ser positivos, rechazamos la solución negativa y nos queda que los números buscados son:

$$2x + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = \boxed{13}$$

$$2x + 3 = 2 \cdot 6 + 3 = \boxed{15}$$

158 Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 306.

159 Calcula dos números consecutivos sabiendo que sus cuadrados suman 145.

160 Obtén dos números pares consecutivos cuya suma de cuadrados es 340.

161 Calcula dos números impares consecutivos sabiendo que el cuadrado de su suma es 256.

162 La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es 371. Averigua de qué números se trata.

163 Calcula un número tal que el doble de su cuadrado menos la mitad de su cuadrado es 1014.

164 Si a un número se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene 24. ¿De qué número se trata?

165 Calcula el lado de un cuadrado cuya área mide 121 centímetros cuadrados.

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

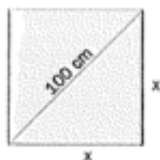
166 Calcula el radio de un círculo que tiene de área 36π centímetros cuadrados.

167 Un terreno rectangular ocupa 128 metros cuadrados. Calcula sus dimensiones sabiendo que un lado es el doble que el otro.

168 Calcula la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su altura es 2 centímetros menor que su base y que su área es de 168 centímetros cuadrados.

169 El área de una parcela rectangular es de 37 500 metros cuadrados. Si la base de la parcela mide 100 metros más que la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

170 Calcula cuánto miden los lados de un cuadrado cuya diagonal mide 100 centímetros.



**COMPRUEBA LO QUE
HAS APRENDIDO****5. Ecuaciones de primer y segundo grado****1** Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $3(5 - 2x) - (8x + 7) = 6x + 4 - 2(x - 1)$

b) $\frac{2x - 3}{4} - \frac{x - 1}{2} = \frac{x}{8} - 2$

2 Tres amigos se han repartido una bolsa de cacahuets de modo que el primero ha recibido el doble que el segundo, y este, la tercera parte de lo que le ha correspondido al tercero. Si la bolsa pesaba 1200 gramos, ¿cuánto le ha tocado a cada uno?

3 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 243 = 0$

c) $6x^2 + 3x = 0$

b) $x^2 - 4x - 12 = 0$

d) $2x^2 + 3x - 2 = 2x + 1$

4 El producto de dos números positivos consecutivos es 156. ¿Qué números son?

6. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1 Sistemas de ecuaciones

- Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un conjunto formado por dos ecuaciones con dos incógnitas que están elevadas a 1. Su expresión general es:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ siendo } a, b, c, a', b' \text{ y } c' \text{ números reales.}$$

Los números a, b, a' y b' son los coeficientes del sistema, y los números c y c' , los términos independientes.

- La solución de un sistema es una pareja de números tales que al sustituir x e y por ellos verifican las dos ecuaciones del sistema. Un sistema puede tener una solución, ninguna o infinitas soluciones.

171 Escribe en la forma general el sistema y comprueba si $x = 2, y = -1$ es solución.

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 11 \\ 2y = x - 5 \end{cases}$$

En la forma general, los términos independientes quedan en un miembro:

$$\begin{cases} 3x - y = 11 - 1 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 10 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 2$ e $y = -1$ se obtiene:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) \neq 10 \\ -2 + 2 \cdot (-1) \neq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 1 \neq 10 \\ -2 - 2 \neq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \neq 10 \\ -4 \neq -5 \end{cases}$$

Las ecuaciones no se verifican. Por tanto, no es solución

172 Escribe la expresión general de cada uno de los sistemas siguientes.

Ejemplo: $\begin{cases} 2(x-1) + 3y - 1 = x \\ 5 - (x+2) = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 + 3y - 1 = x \\ 5 - x - 2 = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - x = 1 + 2 \\ -x - y = -4 - 5 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ -x - y = -7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4y + 5 = x + 4 \\ 3x + 2y = 2x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 + y - (2x - y) = 0 \\ 6x + 9y - 3 = 2 \end{cases}$

173 Indica si los valores de x e y son solución del sistema dado en cada caso.

Ejemplo $4x + 3y - 1 = x + y + 3$ $x = -2, y = 5$
 $2(y - 1) = 5 - (x - 1)$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 - 1 = -2 + 5 + 3 \\ 2(5 - 1) = 5 - (-2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 + 15 - 1 = 6 \\ 2 \cdot 4 = 5 - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Es solución porque verifica las dos ecuaciones del sistema.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 - x - 5y \\ 5 + x = 2y + 10 \end{cases}$ $x = -3, y = 1$

b) $\begin{cases} 4(y + 5) = 6 - (2 + x) \\ 2x - 3y = x + 3y - 4 \end{cases}$ $x = -1, y = -2$

c) $\begin{cases} x + 2y - 2 = y + 3 \\ x - (y + 1) = 4x - 3y + 9 \end{cases}$ $x = 0, y = 5$

174 Comprueba que $x = 2, y = 0$ y $x = 7, y = -1$ son soluciones del sistema $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 10y = 4 - 2x \end{cases}$

2 Resolución de sistemas por sustitución

El método de **sustitución** para resolver sistemas de ecuaciones consiste en **despejar** una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y **sustituir** su valor en la otra ecuación.

175 Resuelve por sustitución el sistema $\begin{cases} 4x + y - 5 = 3(x + 1) - 2y \\ y - (x + 2) = 4(y + 3) + x \end{cases}$

Escribimos primero el sistema en la forma general:

$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 3x + 3 - 2y \\ y - x - 2 = 4y + 12 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 3x + 2y = 3 + 5 \\ y - x - 4y - x = 12 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 8 \\ -2x - 3y = 14 \end{cases}$$

Despejamos x en una de las ecuaciones: $x = 8 - 3y$

Sustituimos en la otra: $-2 \cdot (8 - 3y) - 3y = 14$

Resolvemos la ecuación obtenida: $-16 + 6y - 3y = 14 \Rightarrow 6y - 3y = 14 + 16 \Rightarrow 3y = 30 \Rightarrow y = 10$

Sustituimos el valor de y en la x despejada: $x = 8 - 3 \cdot 10 = 8 - 30 = -22$

La solución es: $x = -22, y = 10$

176 Halla por el método de sustitución la solución de los sistemas siguientes.

Ejemplo $\begin{cases} 5x + 2y = -9 \\ 3x + 4y = -11 \end{cases}$

$$4y = -11 - 3x \Rightarrow y = \frac{-11 - 3x}{4} \quad \text{Sustituimos y}$$

$$5x + 2 \cdot \frac{-11 - 3x}{4} = -9$$

$$\frac{20x}{4} + \frac{-22 - 6x}{4} = \frac{-36}{4} \Rightarrow 20x - 22 - 6x = -36 \Rightarrow 14x = -14 \Rightarrow x = -1$$

$$y = \frac{-11 - 3 \cdot (-1)}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \Rightarrow \text{La solución es: } x = -1, y = -2.$$

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x - 5y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$

177 Resuelve por sustitución los siguientes sistemas.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 6x + 3y - 5 = 1 - 2x + y \\ 2y + 4 = x + 1 \end{cases}$$

Pasando a la forma general:
$$\begin{cases} 6x + 2x + 3y - y = 1 + 5 \\ -x + 2y = 1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 6 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$-x = -2y - 3 \Rightarrow x = 2y + 3$$

$$8 \cdot (2y + 3) + 2y = 6$$

$$16y + 24 + 2y = 6 \Rightarrow 16y + 2y = 6 - 24 \Rightarrow 18y = -18 \Rightarrow y = -1$$

$$x = 2 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow x = 1 \quad \text{La solución es } x = 1, y = -1.$$

a)
$$\begin{cases} 6x + 3y = -2 + x + 2y \\ 4x - 2y + 7 = 2x + y - 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + 1 = 2x \\ 3x - 5y + 2 = x + y - 4 \end{cases}$$

178 Resuelve el siguiente sistema por sustitución:
$$\begin{cases} 2(y - 2) + 6x = 3y - 5 \\ x - (y - 3) = 3x - 2y \end{cases}$$

3 Resolución de sistemas por reducción

- El método de **reducción** consiste en eliminar una incógnita al sumar las ecuaciones del sistema.
- A veces es necesario **multiplicar** una o las dos ecuaciones del sistema por números, con el fin de conseguir **coeficientes opuestos** de alguna incógnita en las ecuaciones y que se eliminen al sumar.

179 Resuelve por reducción:
$$\begin{cases} 2(x - 3) - 3y = 9 - 3x \\ x - (2y + 4) = 4x - 13 \end{cases}$$

Escribimos en forma general:
$$\begin{cases} 2x - 6 - 3y = 9 - 3x \\ x - 2y - 4 = 4x - 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 3x = 9 + 6 \\ x - 2y - 4x = -13 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ -3x - 2y = -9 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 5 para que los coeficientes de x en las

ecuaciones sean opuestos:
$$\begin{cases} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones y despejamos la incógnita que queda:
$$\begin{cases} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \\ \hline -19y = 0 \end{array} \Rightarrow y = \frac{0}{-19} = 0$$

Sustituimos el valor de y obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y despejamos x :

$$5x - 3 \cdot 0 = 15 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{\text{La solución es: } x = 3, y = 0.}$$

180 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la incógnita y ya son opuestos, sumamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ x - 5y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x + 5y = 6 \\ x - 5y = -11 \\ \hline 5x = -5 \end{array} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 4 \cdot (-1) + 5y = 6 \Rightarrow 5y = 6 + 4 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

La solución es: $x = -1, y = 2$.

a)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 5y - 3x = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3 = 7y \\ -2x - y = -5 \end{cases}$$

177 Resuelve por sustitución los siguientes sistemas.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 6x + 3y - 5 = 1 - 2x + y \\ 2y + 4 = x + 1 \end{cases}$$

Pasando a la forma general:
$$\begin{cases} 6x + 2x + 3y - y = 1 + 5 \\ -x + 2y = 1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 6 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$-x = -2y - 3 \Rightarrow x = 2y + 3$$

$$8 \cdot (2y + 3) + 2y = 6$$

$$16y + 24 + 2y = 6 \Rightarrow 16y + 2y = 6 - 24 \Rightarrow 18y = -18 \Rightarrow y = -1$$

$$x = 2 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow x = 1 \quad \text{La solución es } x = 1, y = -1.$$

a)
$$\begin{cases} 6x + 3y = -2 + x + 2y \\ 4x - 2y + 7 = 2x + y - 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + 1 = 2x \\ 3x - 5y + 2 = x + y - 4 \end{cases}$$

178 Resuelve el siguiente sistema por sustitución:
$$\begin{cases} 2(y - 2) + 6x = 3y - 5 \\ x - (y - 3) = 3x - 2y \end{cases}$$

3 Resolución de sistemas por reducción

- El método de **reducción** consiste en eliminar una incógnita al sumar las ecuaciones del sistema.
- A veces es necesario **multiplicar** una o las dos ecuaciones del sistema por números, con el fin de conseguir **coeficientes opuestos** de alguna incógnita en las ecuaciones y que se eliminen al sumar.

179 Resuelve por reducción:
$$\begin{cases} 2(x - 3) - 3y = 9 - 3x \\ x - (2y + 4) = 4x - 13 \end{cases}$$

Escribimos en forma general:
$$\begin{cases} 2x - 6 - 3y = 9 - 3x \\ x - 2y - 4 = 4x - 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 3x = 9 + 6 \\ x - 2y - 4x = -13 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ -3x - 2y = -9 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 5 para que los coeficientes de x en las

ecuaciones sean opuestos:
$$\begin{cases} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones y despejamos la incógnita que queda:
$$\begin{cases} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 15x - 9y = 45 \\ -15x - 10y = -45 \\ \hline -19y = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{-19} = 0 \end{array}$$

Sustituimos el valor de y obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema y despejamos x :

$$5x - 3 \cdot 0 = 15 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{La solución es: } x = 3, y = 0.$$

180 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas.

Ejemplo
$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la incógnita y ya son opuestos, sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ x - 5y = -11 \end{cases} \\ \hline 5x = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 4 \cdot (-1) + 5y = 6 \Rightarrow 5y = 6 + 4 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \end{array}$$

La solución es: $x = -1, y = 2$.

a)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 5y - 3x = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3 = 7y \\ -2x - y = -5 \end{cases}$$

181 Calcula la solución de los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

Ejemplo
$$\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 2 - x - y = 2x + y \end{cases}$$

Primero expresamos el sistema en forma general:
$$\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -x - y - 2x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -3x - 2y = -2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumando:
$$\begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -6x - 4y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8x + 4y = 0 \\ -6x - 4y = -4 \\ \hline 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \end{array}$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema: $8(-2) + 4y = 0 \Rightarrow 4y = +16 \Rightarrow y = +4$.

La solución es: $x = -2$, $y = +4$.

a)
$$\begin{cases} 6x + 9y - 2 = 3 + x \\ 2x + y = 4 - 2y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 4 + 5x + y \\ 4x + 3y - 2 = x + y - 3 \end{cases}$$

182 Halla por reducción la solución de:
$$\begin{cases} 4(x - 2) - 3y = 6 \\ 6x - (2 - y) = -14 \end{cases}$$

4 Problemas con sistemas de ecuaciones

En ocasiones es más cómodo utilizar dos incógnitas para plantear y resolver un problema. En estos casos hay que plantear dos ecuaciones y resolver el sistema que forman.

183 En un club deportivo, el número de chicas excede en 8 a la tercera parte del número de chicos.

Si en total son 64 personas, ¿cuántos chicos y cuántas chicas hay en el club?

Sean x el número de chicos e y el de chicas. Como el número de chicas excede en 8 a la tercera parte del de chicos, escribimos: $y = \frac{x}{3} + 8$. Como en total son 64, escribimos: $x + y = 64$.

A partir de estos datos planteamos el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 8 \\ x + y = 64 \end{cases}$$

A continuación, como tenemos la y despejada en la primera ecuación, resolvemos el sistema por sustitución:

$$x + \frac{x}{3} + 8 = 64 \Rightarrow \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{24}{3} = \frac{192}{3} \Rightarrow 3x + x + 24 = 192 \Rightarrow 4x = 168 \Rightarrow x = 42$$

$$y = \frac{42}{3} + 8 = 22. \text{ Por tanto, hay 42 chicos y 22 chicas. }$$

184 Eva y su hermano Juan tienen 78 cromos de la misma colección, pero Juan tiene el doble que Eva. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

185 En un pueblo hay problemas de abastecimiento de agua. El Ayuntamiento ha comprado 2 depósitos para almacenarla. La capacidad de uno de ellos excede en 20000 litros la del otro, y entre los dos pueden almacenar 120000 litros de agua. ¿Qué capacidad tiene cada uno de ellos?

186 Halla dos números tales que su diferencia es 18 y que el pequeño es 4 unidades menor que la mitad del mayor.