



**ACTIVIDADES DE
RECUPERACIÓN DE
LA MATERIA PENDIENTE:
MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS CCSS I**

**Departamento de Matemáticas
IES Monterroso (Estepona)**

El Departamento de Matemáticas convoca un examen para la evaluación de pendientes de Bachillerato cada evaluación del curso 2025/26, según el siguiente calendario:

Evaluación	Fecha examen	Hora	Lugar
Primera	17 de noviembre 2025	17 h	Aula Magna
Segunda	2 de febrero 2026	17 h	Aula Magna
Tercera	13 de abril 2026	17 h	Aula Magna
Recuperación Final	27 de abril 2026	17 h	Aula Magna

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA EL TRIMESTRE 1:

Además de la teoría, ejercicios y problemas trabajados con el profesor/a del curso anterior en clase, se propone repasar con las siguientes:

Trimestre 1: Análisis.

Pág. 129 a 132.-

Ejerc. 1, 3, 5, 7, 12, 14, 16, 17, 21, 24, 25, 30, 33, 35, 38, 40, 44

Pág. 150 a 152.-

Ejerc. 5, 9, 14, 15, 17, 21, 23, 26, 27, 28, 31, 36, 37, 40, 49

Pág. 177 a 180.-

Ejerc. 4, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 19, 26, 28, 31, 32, 33, 37, 39, 40, 45

Pág. 205 a 208.-

Ejerc. 9, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 43, 45, 46, 47

En las páginas adjuntas se incluyen, además, algunos ejercicios y problemas resueltos para consulta y práctica, si se estima oportuno.

Ejercicios y problemas resueltos

1. Dominio de definición

Hallar el dominio de definición de esta función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}$$

Hazlo tú. Halla el dominio de definición de esta función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

2. Interpolación lineal

Un boeing 747 consume 83912 litros de combustible en un vuelo Madrid-Caracas (7001 km) y 13143 litros en un vuelo Madrid-París (1054 km). Estimar el consumo en un vuelo Madrid-Moscú (3044 km).

Hazlo tú. La población de un municipio era de 23442 habitantes en el año 2000 y de 26087 en el año 2012. Estima la población en los años 2005 y 2013.

3. Función cuadrática

Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función:

$$N(t) = -20t^2 + Bt + C$$

donde t es la hora de visita.

Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1500 visitantes, hallar B y C y representar la función.

Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, 4 \leq t \leq 7$$

La función está definida para los valores de x que hacen el radicando positivo: $2x^2 + 7x - 4 > 0$.

Resolvemos la inecuación, buscando en primer lugar las soluciones de la ecuación:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \rightarrow x = -4; x = \frac{1}{2}$$

Estos valores determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de $2x^2 + 7x - 4$.

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
SIGNO DE $2x^2 + 7x - 4$	+	-	+

Dominio de definición de $f = (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$.

Análisis del problema. Suponemos que el consumo en el intervalo $[1054, 7001]$ depende linealmente de los kilómetros recorridos. Por tanto, podemos estimar el consumo, para un recorrido intermedio, mediante interpolación lineal.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1054, 13143) y (7001, 83912):

$$\text{Pendiente: } m = \frac{83912 - 13143}{7001 - 1054} = 11,9$$

$$\text{Ecuación: } f(x) = 13143 + 11,9(x - 1054) = 11,9x + 600,4$$

$$\text{Para } x = 3044 \rightarrow f(3044) = 36824$$

El consumo estimado para el vuelo Madrid-Moscú es de 36824 litros.

La función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$ es una parábola abierta hacia abajo. Su punto más alto (17, 1500) corresponde al vértice.

Con la abscisa del vértice calculamos B :

$$t = \frac{-b}{2a} \rightarrow 17 = \frac{-B}{2(-20)} \rightarrow B = 680$$

La parábola pasa por (17, 1500).

$$N(17) = 1500 \rightarrow -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + C = 1500 \rightarrow C = -4280$$

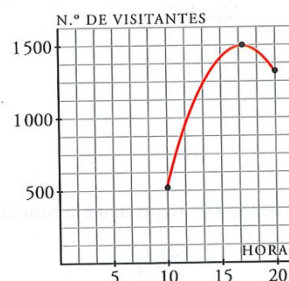
Por tanto, la función es:

$$N(t) = -20t^2 + 680t - 4280; 10 \leq t \leq 20$$

Para representar la función hallamos algunos puntos:

$$t = 10 \rightarrow N(10) = 520 \rightarrow (10, 520)$$

$$t = 20 \rightarrow N(20) = 1320 \rightarrow (20, 1320)$$



Ejercicios y problemas resueltos

4. Función definida "a trozos"

El salario neto mensual es el que se obtiene al restar los impuestos obligatorios al salario bruto. En cierto país se aplican estos impuestos:

- 20 % de la parte del salario bruto comprendida entre 500 €, que es el salario mínimo, y 2000 €.
- 40 % de la parte del salario bruto superior a 2000 €.

- a) ¿Qué salario neto corresponde a 1200 € de salario bruto? ¿Y a 2500 €?
- b) Escribir la función que da los impuestos según el salario bruto x , y representarla.
- c) ¿Cuál debe ser, como mínimo, el salario bruto para que el neto sea superior a 2500 €?

- a) Tenemos en cuenta que los primeros 500 € no tienen impuestos.

El salario neto para 1200 € es $1200 - 0,2 \cdot (1200 - 500) = 1060$ €

El salario neto para 2500 € es $2500 - 0,2 \cdot 1500 - 0,4 \cdot 500 = 2000$ €

- b) Calculamos la función que nos da los impuestos $I(x)$ en los casos en que $500 < x \leq 2000$ y $x > 2000$.

- Si $500 < x \leq 2000$:

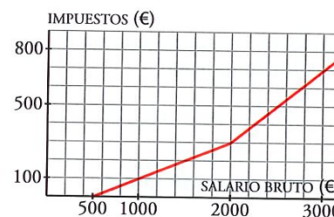
$$I(x) = 0,2(x - 500) = 0,2x - 100$$

- Si $x > 2000$:

$$I(x) = 0,2 \cdot 1500 + 0,4(x - 2000) = 0,4x - 500$$

Por tanto:

$$I(x) = \begin{cases} 0,2x - 100 & \text{si } 500 < x \leq 2000 \\ 0,4x - 500 & \text{si } x > 2000 \end{cases}$$



- c) Resolvemos la inecuación $x - I(x) > 2500$:

$$x - (0,4x - 500) > 2500 \rightarrow 0,6x > 2000 \rightarrow x > 3333,33$$

El salario bruto debe ser superior a 3333,33 €.

5. Hipérbolas

Representar las hipérbolas siguientes:

a) $y = \frac{2}{x-3}$

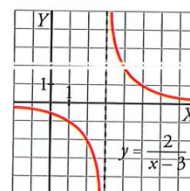
b) $y = \frac{3x-5}{x-2}$

c) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

- a) La gráfica de $y = \frac{2}{x-3}$ es como la de $y = \frac{2}{x}$ desplazada 3 unidades a la derecha, como se puede comprobar dando algunos valores:

$$f(1) = -1, f(2) = -2, f(4) = 2, f(5) = 1$$

Sus asíntotas son el eje X y la recta $x = 3$.



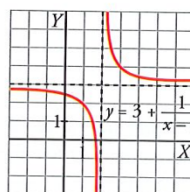
- b) Vamos a escribir la función utilizando la relación:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{3x-5}{x-2} \rightarrow \frac{3x-5}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$$

Por tanto, la gráfica de $y = \frac{3x-5}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$

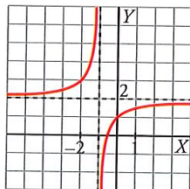
es como la de $y = \frac{1}{x}$ desplazada 2 unidades a la derecha y 3 arriba.



- c) Dividimos:

$$\frac{2x+1}{x+1} \rightarrow \frac{2x+1}{x+1} = 2 + \frac{-1}{x+1}$$

La gráfica de $y = \frac{2x+1}{x+1}$ es la simétrica de $\frac{1}{x}$ respecto al eje X , desplazada 2 unidades hacia arriba y 1 hacia la izquierda.



En la web

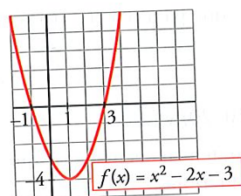


Animación interactiva para ver cómo varía la representación de una hipérbola.

Hazlo tú. Representa la función:

$$y = \frac{-2x+7}{x-3}$$

6. Transformaciones de una función



Esta es la gráfica de la función:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Representar, a partir de ella, las funciones siguientes y escribir su ecuación:

- a) $g(x) = f(x) + 3$ b) $h(x) = f(x + 2)$
c) $i(x) = -f(x)$ d) $j(x) = f(2x)$

Hazlo tú. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representa estas funciones:

- a) $g(x) = f(x - 4)$ b) $h(x) = f(x) - 2$
c) $i(x) = \sqrt{2x}$

- a) La gráfica de g se obtiene trasladando la de f tres unidades hacia arriba.

Su ecuación es:

$$g(x) = x^2 - 2x - 3 + 3 \rightarrow g(x) = x^2 - 2x$$

- b) Se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacia la izquierda.

Ecuación de h :

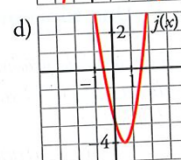
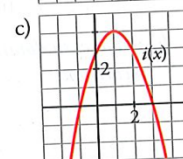
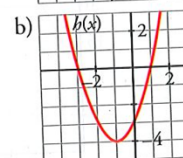
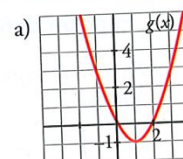
$$h(x) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$$

- c) Se obtiene cambiando de signo los valores de $f(x)$. Será una parábola abierta hacia abajo con el vértice en $(1, 4)$.

$$\text{Ecuación: } i(x) = -x^2 + 2x + 3$$

- d) Se obtiene contrayendo la gráfica de f en sentido horizontal dividiendo entre 2. Su vértice será $(1/2, -4)$, y los puntos de corte con los ejes son $(-1/2, 0)$ y $(3/2, 0)$.

$$\text{Ecuación: } j(x) = 4x^2 - 4x - 3$$

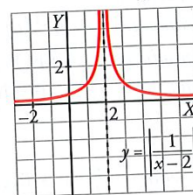
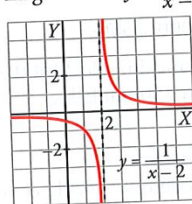


7. Valor absoluto de una función

Definir como funciones "a trozos" las siguientes funciones y representarlas gráficamente.

- a) $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|$
b) $f(x) = 4|x| - x^2$
c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

- a) La gráfica de $y = \frac{1}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades hacia la derecha.



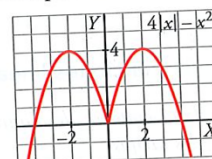
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- b) Recordamos que la función $y = |x|$ se define así: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 4(-x) - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -4x - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Buscamos los vértices y los puntos de corte con los ejes de cada parábola:

PARÁBOLA	VÉRTICE	CORTES CON EJE X
$y = -4x - x^2$	$(-2, 4)$	$(0, 0)$ y $(-4, 0)$
$y = 4x - x^2$	$(2, 4)$	$(0, 0)$ y $(4, 0)$

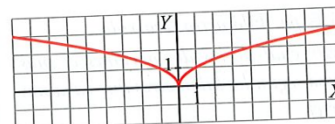


Hazlo tú. Define por intervalos y representa:

- a) $f(x) = 2x - |x|$
b) $f(x) = \left| 2 - \frac{x^2}{2} \right|$

- c) Aplicando la definición de $y = |x|$, tenemos:

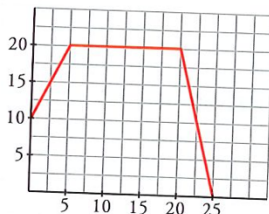
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Ejercicios y problemas guiados

1. Función definida a "trozos"

a) Escribir la expresión analítica de esta función:



b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

- a) • Obtén la pendiente del primer tramo de recta que pasa por (0, 10) y (5, 20) y escribe su ecuación.
- Observa que el segundo tramo es constante.
- El tercer tramo de recta pasa por los puntos (20, 20) y (25, 0).
- Para escribir la expresión analítica de la función, ten en cuenta entre qué valores de x están definidos cada uno de los tramos anteriores.
- b) • ¿Para qué valores de x existe la función?
- Observa los valores máximo y mínimo de $f(x)$ para determinar el recorrido.

Solución:

$$a) f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 20 & \text{si } 5 \leq x < 20 \\ 100 - 4x & \text{si } 20 \leq x \leq 25 \end{cases} \quad b) \text{ Dominio} = [0, 25]. \text{ Recorrido} = [0, 20].$$

2. Una función cuadrática

Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:

$$C = 40\,000 + 20q + q^2$$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

- a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo gráficamente.
- b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

- a) • La función *beneficio*, B , la obtendrás restando del precio de venta de q unidades, $520q$, el coste para producir esas q unidades.
- Obtendrás una función cuadrática. Representala.
- b) Observando la representación gráfica de la función *beneficio*, apreciarás en qué punto alcanza su valor máximo (en el vértice, ya que es una parábola con las ramas hacia abajo).

Solución:

- a) $B(q) = -40\,000 + 500q - q^2$.
- b) El beneficio máximo de 22 500 euros se obtiene produciendo 250 unidades.

3. Una función polinómica

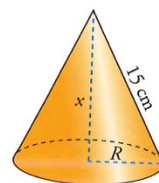
Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.

- a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x .
- b) ¿Cuál es su dominio de definición?

- a) • Recuerda cómo se calcula el volumen de un cono en función del radio de la base y de la altura.
- Debes expresar el radio del cono en función de la altura x (observa en el dibujo el triángulo de lados x , R y 15 cm).
- b) ¿Entre qué valores puede variar la altura x ?

Solución:

$$a) V(x) = \frac{\pi(225x - x^3)}{3} \quad b) \text{ Dom } V(x) = (0, 15)$$



4. Funciones lineales

Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tarifas:

A: 50 € fijos más 0,25 € por kilómetro recorrido.

B: 0,5 € por kilómetro recorrido.

Analizar cuál de las dos opciones es más ventajosa según los kilómetros que vayamos a recorrer.

- Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto según los kilómetros recorridos.
- Representa en los mismos ejes las dos funciones, eligiendo una escala adecuada.
- Halla el punto de corte de ambas funciones y observa los valores de la función a la izquierda y a la derecha de ese punto.

Solución: La opción B es más ventajosa si se recorren menos de 200 km. A partir de esta distancia, es más ventajosa la opción A.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

■ Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \frac{2}{(x+5)^2}$

b) $y = \frac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \frac{x}{x^2-x+2}$

d) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$

b) $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

3 Di cuál es el dominio de definición de:

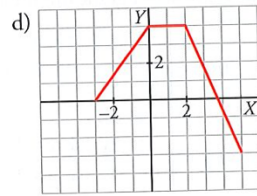
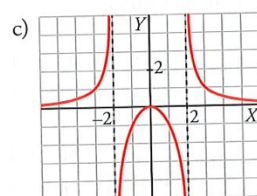
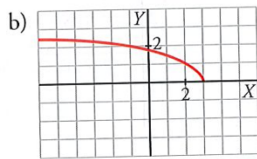
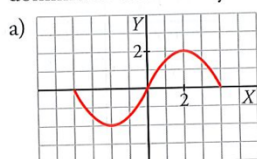
a) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

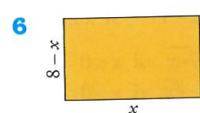
c) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

4 Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:



5 La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t , hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?



Escribe el área de este rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x .

¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

7 La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37°C ha evolucionado según la función $T = -0,1t^2 + 1,2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

■ Funciones lineales y cuadráticas. Interpolación

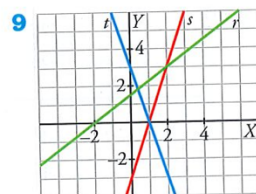
8 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas y representálas gráficamente:

a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por $(-7, 2)$ y su pendiente es $-0,75$.

c) Corta a los ejes en $(3, 5; 0)$ y $(0, -5)$.

d) Es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por $(-2, -3)$.



Calcula la pendiente de las rectas r , s y t y escribe su ecuación.

10 Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	...	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	...

11 Esta tabla muestra la temperatura atmosférica tomada a diferentes alturas:

ALTURA (m)	0	500	1000	1500
TEMPERATURA ($^\circ\text{C}$)	15	11,7	8,4	5,1

Calcula la temperatura a 1200 m y a 2000 m.

12 Representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \frac{x^2}{3} + 3x + 6$

e) $y = -4x^2 + 1$

f) $y = -2x^2 - 3x + 0,5$

13 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(-2, -9)$, $(2, -5)$ y $(4, 0)$.

a) Utilizando la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

b) Por el método de Newton.

14 Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos dados:

a) $(1, -1)$, $(3, 3)$, $(5, -1)$

b) $(0, -4)$, $(1, -6)$, $(3, -4)$

Completa los puntos $(4, \dots)$ y $(-3, \dots)$ para que pertenezcan a cada una de las parábolas anteriores.

Ejercicios y problemas propuestos

Representación de funciones elementales

15 Asocia a cada gráfica su expresión analítica.

a) $y = -0,5x^2 + 3$

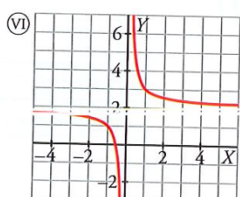
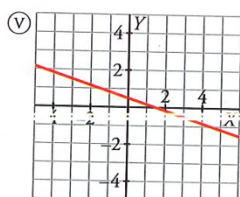
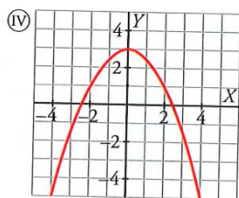
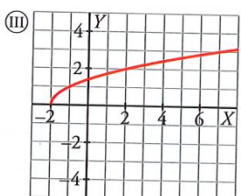
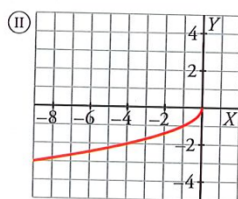
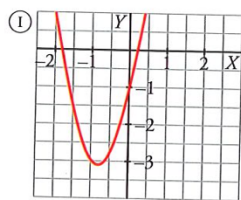
b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = 3x^2 + 5x - 1$

d) $y = \frac{1}{x} + 2$

e) $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

f) $y = -\sqrt{-x}$



16 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x-1}$

b) $y = -\sqrt{x+3}$

c) $y = 2 + \sqrt{x}$

d) $y = 1 - \sqrt{x}$

17 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{1}{x-1}$

c) $y = \frac{-1}{x}$

d) $y = \frac{-1}{x-3}$

18 Representa estas funciones en el intervalo indicado:

a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$

b) $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$

c) $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = \frac{3x-30}{5}$, $[-5, 5]$

e) $y = \frac{1}{x-2}$, $[-2, 2)$

f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



En la web



Ejercicios para relacionar la representación gráfica de una función con su expresión analítica.

Funciones definidas "a trozos"

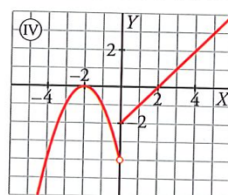
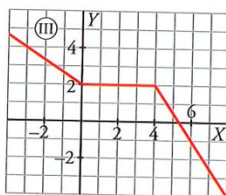
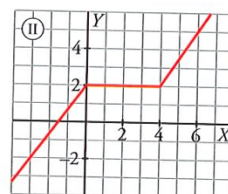
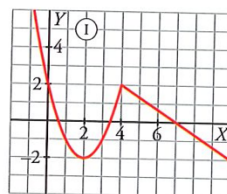
19 Asocia a cada gráfica su expresión analítica:

a) $y = \begin{cases} 2 - \frac{2x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 8 - \frac{3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 4 \\ \frac{14-2x}{3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2 + \frac{4x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{3x}{2} - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



20 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \frac{-x^2}{2} + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

21 Representa.

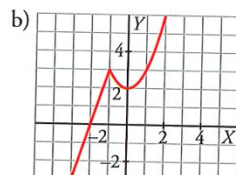
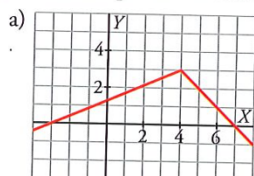
a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

22 Obtén la expresión analítica de estas funciones:



■ Valor absoluto de una función

- 23** Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

- 24** Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |3x + 6|$

c) $y = \left| \frac{x-3}{2} \right|$ d) $y = |-x - 1|$

- 25** Representa estas funciones:

a) $y = |x^2 - 1|$ b) $y = |x^2 - 4x|$

c) $y = |x^2 + 2x - 3|$ d) $y = |x^2 - 2x + 1|$

- 26** Representa.

a) $y = \left| \frac{1}{x} \right|$ b) $y = 1 + |x|$

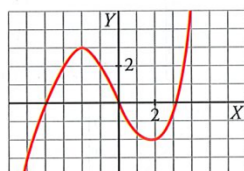
c) $y = \frac{|x|}{x}$ d) $y = 2|x| + x$

■ Transformaciones de una función

- 27** Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:

a) $g(x) = f(x) - 3$ b) $h(x) = f(x + 2)$

- 28** Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ b) $y = f(x) + 2$

- 29** A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:

a) $g(x) = f(x) - 2$ b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$ d) $j(x) = |f(x)|$

- 30** Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:

a) $g(x) = f(x + 1)$ b) $h(x) = f(x) - 3$

- 31** Representa sucesivamente:

$$y = \frac{2}{x}; \quad y = \frac{2}{x-3}; \quad y = \frac{2}{x} + 1; \quad y = -\frac{2}{x-3}$$

- 32** A partir de la gráfica de $f(x) = x^2$, representa:

a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $y = 3f(x)$ d) $y = \frac{f(x)}{2}$

Para resolver

- 33** El porcentaje de hogares españoles que tenían teléfono móvil era, en 2006, del 80,5% y en 2009, del 88,2%. Estimar el porcentaje que había en 2008.

- 34** El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros, y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.

- 35** Con unos gastos en publicidad de 3000 €, las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28000 €; y con 5000 € invertidos en publicidad, las ventas han ascendido a 39000 €.

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuáles serían las ventas si se invirtieran 4000 € en publicidad.

b) Si sabemos que con un gasto de 6000 € se han obtenido unas ventas de 40000 €, estima mediante interpolación parabólica las ventas que se obtendrían invirtiendo 4000 € en publicidad.

- 36** Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima?

Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

- 37** En la cocina de un restaurante, un equipo de 2 cocineros es capaz de preparar los pedidos para 30 comensales. Si el equipo es de 4 cocineros la capacidad se eleva hasta los 50 comensales. Y si el equipo llega a 8 cocineros, se estorbarían unos a otros y no habría fuegos para todos, por lo que la capacidad se mantendría en 50 comensales. Estima mediante interpolación parabólica cuántos comensales podría atender un equipo de 5 cocineros.

- 38** Un opositor se enfrenta a un temario de 3100 páginas. Sabe que si estudia 4 horas diarias es capaz de memorizar 4 páginas por día. Si dedica 8 horas, aprende 7 páginas; y si dedica 12 horas, consigue 9 páginas. Se plantea una jornada diaria de 10 horas y quiere saber el número de días que le va a suponer dar una primera vuelta al temario completo. Utiliza la interpolación parabólica para responderle.

- 39** La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

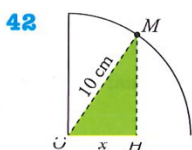
Ejercicios y problemas propuestos

40 En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

- Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2,5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1,5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).
- Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?
- ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0,25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

41 El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.

- Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.
- Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.



En un cuarto de circunferencia de 10 cm de radio tomamos un punto M y construimos el triángulo rectángulo OMH .

Expresa el área de ese triángulo según la medida del cateto x . ¿Cuál es su dominio de definición?

43 Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

- ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?
- Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.
- ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

44 Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto.

- Representa la función.
- Calcula la cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
- ¿Cuántas toneladas se han de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

45 Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se van todos los clientes. La función que nos da el número de cliente, N , según el número de horas que lleva abierta, t , es $N(t) = 80t - 10t^2$.

- Representa la función.
- ¿A qué hora el número de clientes es máximo?
- ¿A qué hora cerrará la discoteca?

46 El porcentaje de alumnos que asisten a un curso de inglés de 10 meses de duración viene dado por la función:

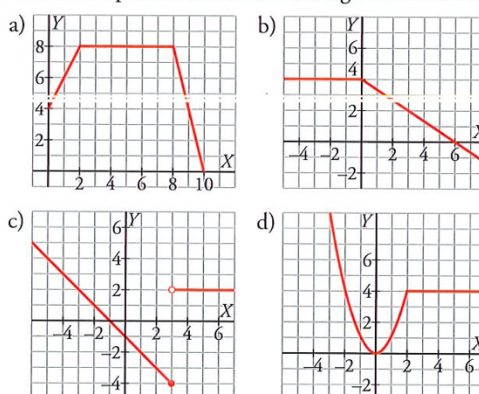
$$P(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \leq 10 \end{cases} \quad t, \text{ en meses}$$

Sabemos que, inicialmente, el 100 % de los alumnos asiste al curso; que transcurrido un mes, asiste el 60 % y que al cumplirse el tercer mes, la asistencia se reduce al 28 %. Calcula a , b , c y representa la función.

47 Las ganancias esperadas de una empresa en los próximos 10 años, en millones de euros, vienen dadas por la función $G(t) = -2t^2 + 20t + 5$; t , en años.

- Representa la función.
- ¿Cuándo serán máximas las ganancias?

48 Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:



49 Representa las siguientes funciones partiendo de una más sencilla y realizando transformaciones sobre ella:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{3x-2}{x-1} & \text{b) } y = \frac{x-2}{x-4} \\ \text{c) } y = \frac{3x+2}{x+1} & \text{d) } y = \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

50 Representa las siguientes funciones y defínalas como funciones "a trozos":

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = |2x + 5| & \text{b) } y = |4 - x^2| \\ \text{c) } y = \left| \frac{3}{2}x - 3 \right| & \text{d) } y = |-x^2 + 2x + 3| \end{array}$$

Ejercicios y problemas resueltos

1. Composición de funciones

Considerar las funciones $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = x^2 - 1$. Hallar:

- a) $g \circ f$ b) $h \circ f$
c) $g \circ h$ d) $h \circ g \circ f$
e) $h \circ h$

Hazlo tú. Halla $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$.

Observamos que $f(\square) = 2^{\square+1}$; $g(\square) = \sqrt{\square+1}$; $h(\square) = \square^2 - 1$.

- a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2^{x+1}) = \sqrt{2^{x+1}+1}$
b) $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(2^{x+1}) = (2^{x+1})^2 - 1 = 2^{2x+2} - 1$
c) $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = x$

Las funciones g y h son inversas porque verifican $(g \circ h)(x) = i(x) = x$.

- d) $(h \circ g \circ f)(x) = h[g(2^{x+1})] = h(\sqrt{2^{x+1}+1}) = (\sqrt{2^{x+1}+1})^2 - 1 = 2^{x+1}$
e) $(h \circ h)(x) = h[h(x)] = h(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$

2. Reconocer funciones compuestas

Explicar cómo, a partir de las funciones $f(x) = 1 + 2^x$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $h(x) = 1/x^2$, se pueden obtener las funciones:

- a) $m(x) = 1 + 2^{\sqrt{x^2+1}}$
b) $n(x) = \frac{1}{(1+2^x)^2}$
c) $p(x) = \sqrt{(1/x^4) + 1}$

Hazlo tú. A partir de las funciones f , g , h aquí definidas, obtén:

- a) $q(x) = \sqrt{(1+2^x)^2 + 1}$
b) $r(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- a) Observamos que $m(x) = 1 + 2^{\sqrt{x^2+1}}$ tiene que ver con $f(x) = 1 + 2^x$ y con $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, de modo que para obtener un valor cualquiera $m(a)$ calculamos en primer lugar $\sqrt{a^2 + 1}$, después elevamos 2 a ese valor y sumamos 1. Es decir aplicamos primero g y después f :

$$f[g(x)] = f(\sqrt{x^2+1}) = 1 + 2^{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow m(x) = (f \circ g)(x)$$

- b) En $n(x)$ intervienen $f(x)$ y $h(x)$. La primera que actúa sobre x es f y después h . Por tanto:

$$h[f(x)] = h(1 + 2^x) = \frac{1}{(1 + 2^x)^2} \rightarrow n(x) = (h \circ f)(x)$$

- c) Para obtener $p(x)$ aplicamos $h(x)$ en primer lugar y después $g(x)$:

$$g[h(x)] = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{x^4} + 1} \rightarrow p(x) = (g \circ h)(x)$$

3. Función inversa de otra

Obtener la función inversa de cada una de las funciones siguientes:

- a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
b) $g(x) = 3 + 2^{x+1}$
c) $h(x) = 2 \ln(x-3)$

Hazlo tú. Obtén la función inversa de:

- a) $p(x) = 3^{x-2}$
b) $q(x) = \log_2(x+1)$
c) $r(x) = \frac{2}{x+4}$

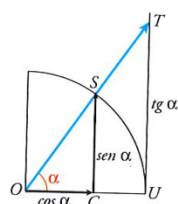
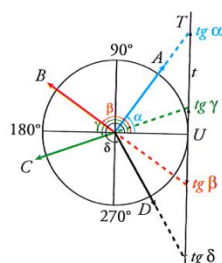
- a) Para obtener la función inversa, intercambiamos las variables y despejamos la y
- $$x = \frac{1}{y-3} \rightarrow y-3 = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} + 3 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$$

- b) Después de intercambiar las variables, pasamos 3 al primer miembro y tomamos logaritmos en base 2 para despejar y :

$$x = 3 + 2^{y+1} \rightarrow x-3 = 2^{y+1} \rightarrow \log_2(x-3) = y+1 \rightarrow y = -1 + \log_2(x-3) \rightarrow g^{-1}(x) = -1 + \log_2(x-3)$$

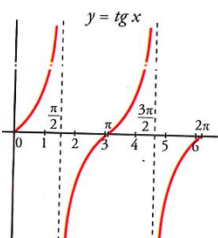
- c) Intercambiamos las variables, pasamos 2 al primer miembro y aplicamos la definición de logaritmo para despejar y :

$$x = 2 \ln(y-3) \rightarrow \frac{x}{2} = \ln(y-3) \rightarrow e^{x/2} = y-3 \rightarrow e^{x/2} + 3 = y \rightarrow h^{-1}(x) = 3 + e^{x/2}$$



Notación

Seno, coseno y tangente de un ángulo se llaman sus **razones trigonométricas**.



En la web

- Animaciones que muestran la representación de:
- la función seno.
 - la función coseno.
 - la función tangente.

Notación

Las funciones

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$$

se llaman **funciones trigonométricas** o **funciones circulares**.

Tangente de un ángulo

En el punto U en el que la circunferencia goniométrica corta a la parte positiva del eje de las X , trazamos una recta t tangente a ella.

Situamos un ángulo sobre la circunferencia. Al prolongar el segundo lado del ángulo, o su semirrecta opuesta, corta a la recta t en un punto T . Se llama **tangente** del ángulo a la medida UT , que será positiva si T está sobre el eje X y negativa si está por debajo (obsérvalo en la gráfica del margen).

Los ángulos de 90° y 270° no tienen tangente, pues ni el segundo lado del ángulo ni la semirrecta opuesta cortan a la recta t .

Relaciones entre seno, coseno y tangente

Si α es un ángulo distinto de 90° y de 270° , se verifica que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Para probarlo, observamos que los triángulos OCS y OUT son semejantes. Por tanto:

$$\frac{UT}{OU} = \frac{CS}{OC} \rightarrow \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Si el ángulo está situado en otro cuadrante, también se cumple la igualdad, con el correspondiente signo.

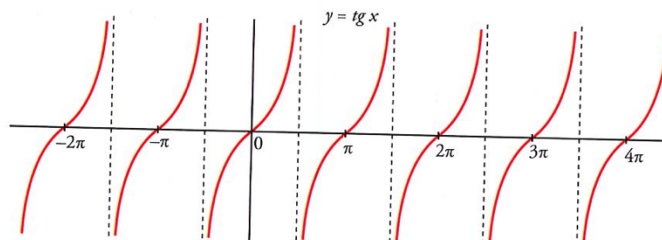
Valores de la tangente

Observa algunos valores de la tangente, que dan lugar a la gráfica adjunta:

GRADOS	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2
tg	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

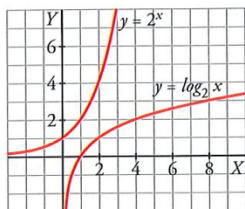
La función tangente

Procediendo de forma similar a como lo hemos hecho para las funciones $\sin x$ y $\cos x$, se obtiene la función $y = \tan x$. Se trata de una función **definida** y **continua** en todo $\mathbb{R}$ salvo en las abscisas $\frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k números enteros (las rectas $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas de la función $y = \tan x$). Es **periódica** de periodo π .



4. Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

A partir de estas gráficas,



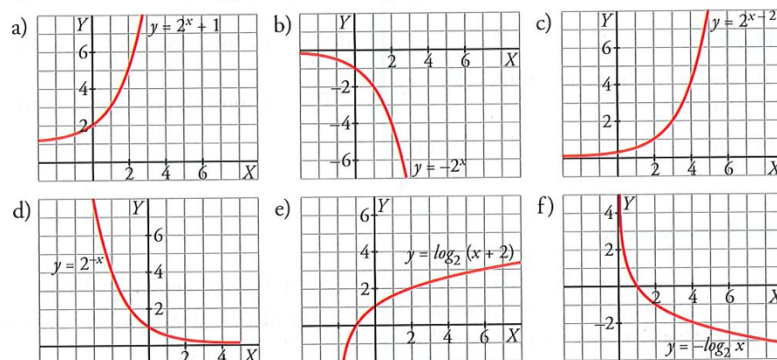
representar:

- a) $y = 2^x + 1$ b) $y = -2^x$
 c) $y = 2^{x-2}$ d) $y = 2^{-x}$
 e) $y = \log_2(x+2)$ f) $y = -\log_2 x$

Hazlo tú. Representa:

- a) $y = 2^x - 1$ b) $y = 2^{x+3}$
 c) $y = \log_2(x-2)$ d) $y = \log_2(-x)$

- a) Se obtiene desplazando $y = 2^x$ una unidad hacia arriba.
 b) Es la simétrica de $y = 2^x$ respecto del eje X .
 c) Se obtiene trasladando 2^x dos unidades hacia la derecha.
 d) Es la simétrica de 2^x respecto del eje Y . Coincide con $y = (1/2)^x$.
 e) Se obtiene trasladando $y = \log_2 x$ dos unidades hacia la izquierda.
 f) Es la simétrica de $\log_2 x$ respecto del eje X .



5. Función exponencial

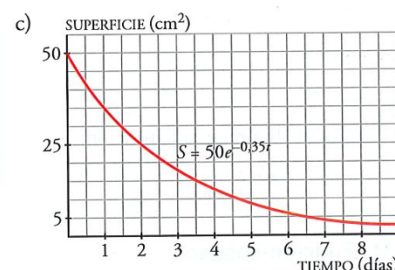
El proceso de cicatrización de una herida sigue una ley exponencial. La superficie S de la herida al cabo de t días se puede calcular mediante la fórmula $S = S_0 e^{kt}$, donde S_0 es la superficie inicial y k una constante.

- a) Si una herida tenía una superficie inicial de 50 cm^2 y al cabo de dos días mide $24,83 \text{ cm}^2$, ¿cuál es el valor de k ?
 b) Calcular la superficie de la herida después de 8 días.
 c) Representar la función.

- a) Conocemos $S_0 = 50$ y un punto $(2; 24,83)$. Sustituyendo estos valores en la fórmula $S = S_0 e^{kt}$ podemos obtener k .

$$S = 50e^{kt} \xrightarrow{t=2} 24,83 = 50e^{2k} \rightarrow e^{2k} = 0,4966 \rightarrow 2k = \ln 0,4966 \rightarrow k = -0,35$$

- b) Para $t = 8$, $S = 50e^{-0,35 \cdot 8} = 3 \text{ cm}^2$



6. Función logarítmica

La gráfica de una función logarítmica del tipo $y = 1 + \log_b(x-a)$ pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(7, 3)$.

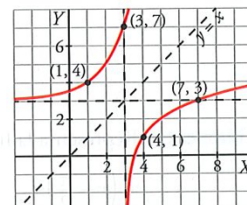
- a) Calcular a y b .
 b) Representar la función y su función inversa.

Hazlo tú. Halla a y b para que la gráfica de la función $y = -2 + \log_b(x+a)$ pase por $(1, 0)$ y $(-1, -1)$.

- a) Pasa por $(4, 1)$: $1 = 1 + \log_b(4-a) \rightarrow \log_b(4-a) = 0 \rightarrow b^0 = 4-a \rightarrow a = 3$
 Pasa por $(7, 3)$: $3 = 1 + \log_b(7-3) \rightarrow 2 = \log_b 4 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = -2$ (no vale)
 $b = 2$

- b) La función es $y = 1 + \log_2(x-3)$.
 Su dominio es $(3, +\infty)$. Pasa por los puntos $(3, 0)$, $(4, 1)$ y $(7, 3)$.

La gráfica de su función inversa es simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante.



Ejercicios y problemas resueltos

7. Grados y radianes

a) Expresar en radianes los siguientes ángulos:

$$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$$

b) Expresar en grados estos ángulos medidos en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{6}$$

Hazlo tú.

a) Expresa en radianes 150° , 180° y 240° .

b) Expresa en grados $\frac{3\pi}{2}$ rad y $\frac{5\pi}{4}$ rad.

a) Si un punto P recorre una circunferencia completa de radio 1, el ángulo de giro es 360° que, medido por el arco, equivale a 2π rad.

$$\text{Por tanto: } 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \rightarrow 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$30^\circ = \frac{180^\circ}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}; 45^\circ = \frac{180^\circ}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}; 60^\circ = \frac{180^\circ}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$90^\circ = \frac{180^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}; 120^\circ = 2 \cdot 60^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}; 135^\circ = 3 \cdot 45^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$b) \frac{5\pi}{6} = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ; \frac{7\pi}{4} = 7 \cdot 45^\circ = 315^\circ; \frac{4\pi}{3} = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$$

$$\frac{5\pi}{2} = 5 \cdot 90^\circ = 450^\circ; 3\pi = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ; \frac{7\pi}{6} = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$$

8. Función seno

Hacer, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = \sin 2x$, dando a x valores comprendidos entre 0 y 2π radianes y representar gráficamente esa función.

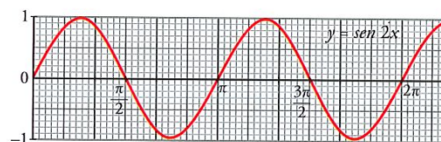
Ponemos la calculadora en radianes: MODE RAD

Para calcular el valor de $\sin 2x$ correspondiente a $x = \frac{\pi}{4}$, hacemos:

$$\sin \left(\left(\pi \div 4 \right) \times 2 \right) = 1$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Para representar estos puntos, expresamos los valores de x en forma decimal $\left(\frac{\pi}{4} \approx 0,785; \frac{\pi}{2} \approx 1,571; \dots \right)$.



Hazlo tú. Representa la función:

$$y = 2 \sin x$$

9. Función coseno

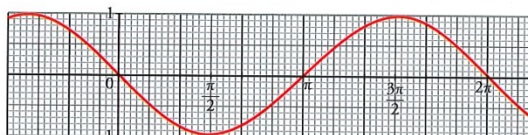
Representar la función:

$$y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

Hacemos una tabla de valores como la del ejercicio anterior:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$	0	-0,7	-1	-0,7	0	0,7	1	0,7	0

Observa que coincide con la gráfica de la función $y = -\sin x$.

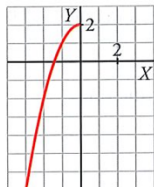


Hazlo tú. Representa la función:

$$y = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Ejercicios y problemas guiados

1. Función inversa



Esta es la gráfica de la función:

$$f(x) = 2 - x^2, \quad x \leq 0$$

a) Dar su dominio de definición y su recorrido.

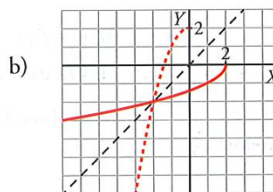
b) Representar su función inversa.

c) Hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

- a) El dominio de definición de f está limitado. Para saber cuál es el recorrido considera cuál es el valor máximo que puede tener $f(x)$.
- b) Haz una tabla de valores de $f(x)$ e invierte las variables para obtener algunos puntos de $f^{-1}(x)$. Recuerda que las funciones inversas deben ser simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.
- c) Al intercambiar las variables y despejar la y , obtendrás dos funciones con distinto recorrido. Ten en cuenta que el dominio de $f(x)$ es el recorrido de $f^{-1}(x)$.

Solución:

- a) Dominio de $f = (-\infty, 0]$
Recorrido de $f = (-\infty, 2]$
- c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{2-x}$



2. Interés compuesto

Depositamos en un banco 5000 € al 4,8 % anual con pago trimestral de intereses.

- a) ¿Cuál será el capital acumulado al cabo de 3 años?
- b) Escribir la función que nos dice en cuánto se transforma ese capital al cabo de t años.

- El 4,8 % anual significa un $\frac{4,8}{4} = 1,2\%$ trimestral.
- Como los periodos de capitalización son trimestrales, al final del primer año el capital se convertirá en $5000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^4$.
- Esa cantidad se multiplicará cada año por $\left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^4$.

Solución:

- a) 5769,5 € b) $f(t) = 5000 \cdot (1,012)^{4t} \approx 5000 \cdot (1,049)^t$

3. Depreciación

Una máquina que costó 20000 € se deprecia a un ritmo del 10 % anual.

- a) ¿Cuál será su valor dentro de 4 años?
- b) ¿Cuántos años tienen que pasar para que su valor sea de 12000 €?
- c) Escribir la función que da el número de años que deben pasar para llegar a un valor x .

- a) Al cabo de un año el precio baja un 10 %. Por tanto, el valor de la máquina será $20000 \cdot (1 - 0,1)$. Repite este razonamiento para cuatro años.
- b) Escribe la función, $f(t)$, que da el precio después de t años. Haz $f(t) = 12000$ y despeja t .
- c) La función pedida es la función inversa de $f(t)$.

Solución:

- a) 13 122 € b) 5 años c) $t = \frac{\log x - \log 20000}{\log 0,9}$

4. Función logística

La función

$$f(x) = \frac{12000}{1 + 499(1,09^{-x})}$$

da las ventas totales de un videojuego x días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6000 juegos vendidos?

- Observa que has de encontrar el valor de x para el que $f(x) = 6000$.
- Opera la expresión hasta eliminar denominadores y hacerla lo más sencilla posible.
- Obtendrás una expresión del tipo $\frac{A}{B} = C^{-x}$. Para obtener el valor de x , toma logaritmos y utiliza la calculadora.

Solución:

Se llegó a los 6000 juegos vendidos 72 días después de su lanzamiento.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Composición de funciones

- Dadas las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x^2$, halla:
a) $f[g(2)]$ b) $g[f(-4)]$ c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$
- Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcula:
a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$
c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$
- Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$, obtén la expresión de las siguientes funciones:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$
- Dadas las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:
a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$
- Dadas las funciones
$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \frac{3}{x-2} \quad h(x) = \sqrt{x-3}$$
obten las expresiones de:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$
d) $g \circ h$ e) $h \circ f$ f) $h \circ g$
Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en $x = 5$ y en $x = 0$.
- Con las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x - 2$, hemos obtenido por composición las funciones $p(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$. Indica cuál de estas expresiones corresponde a $f \circ g$ y cuál a $g \circ f$.

- 7 Explica cómo a partir de las funciones

$$f(x) = 2^{x-1} \quad g(x) = \sqrt{x} + 2 \quad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

$$\begin{aligned} \text{a) } m(x) &= 2^{\sqrt{x}+1} & \text{b) } n(x) &= \sqrt{2^{x-1}} + 2 \\ \text{c) } p(x) &= \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2 & \text{d) } q(x) &= 2^{\frac{4-x}{x-3}} \\ \text{e) } r(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} & \text{f) } s(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1} \end{aligned}$$

- 8 Considera estas funciones:

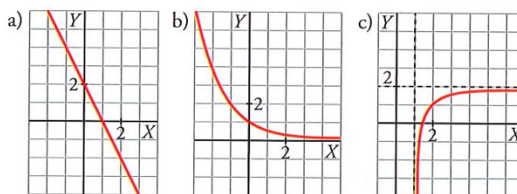
$$f(x) = x - 5 \quad g(x) = \sqrt{x} \quad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

Explica cómo, a partir de f , g y h , se pueden obtener, por composición, p , q y r :

$$p(x) = \sqrt{x-5}; \quad q(x) = \sqrt{x} - 5; \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Función inversa de otra

- Dada $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa f y f^{-1} y comprueba su simetría respecto de $y = x$.
- Halla la función inversa de las siguientes funciones:
a) $y = 3x - 2$ b) $y = \frac{x+3}{2}$
c) $y = \sqrt{2x+1}$ d) $y = 1 + 2^x$
e) $y = 2 + \log_3 x$ f) $y = 4 - x^2, x \geq 0$
- Representa gráficamente la función inversa en cada caso:



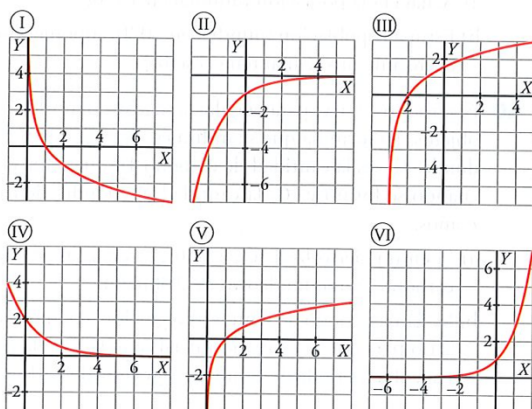
- Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:
a) $f(x) = \frac{1}{x+2}; f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$
b) $f(x) = \sqrt{2x+3}; f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$
c) $f(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}; f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$
- Considera la función $y = \sqrt{x+2}, x \in [-2, 7]$.
a) ¿Cuál es su recorrido?
b) Obtén su función inversa y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

Funciones exponenciales y logarítmicas

- Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = 2^x$:
a) $y = 2^{x+2}$ b) $y = 2^x - 3$
c) $y = 2^{x/2}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$
e) $y = 1 - 2^x$ f) $y = 2^{2-x}$
- Representa las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = \log_2 x$:
a) $y = 1 + \log_2 x$ b) $y = \log_2 (x-1)$
c) $y = 2 - \log_2 x$ d) $y = \log_2 (-x)$
- Con ayuda de la calculadora, representa estas funciones:
a) $y = 3 \cdot 0,8^x$ b) $y = (1/2) \cdot 1,8^x$
c) $y = \ln(2x)$ d) $y = \ln(x+1)$

- 17** Asocia a cada una de las siguientes expresiones la gráfica que le corresponde:

a) $y = \ln x$ b) $y = 2^{1-x}$ c) $y = e^x$
d) $y = -\log_2 x$ e) $y = -(1/2)^x$ f) $y = \log_2 (x + 3)$



- 18** Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY .

- 19** Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = \log_3 x$.

- 20** ¿Cuál es el dominio de $y = \log_2 (2 - x)$? Representala.

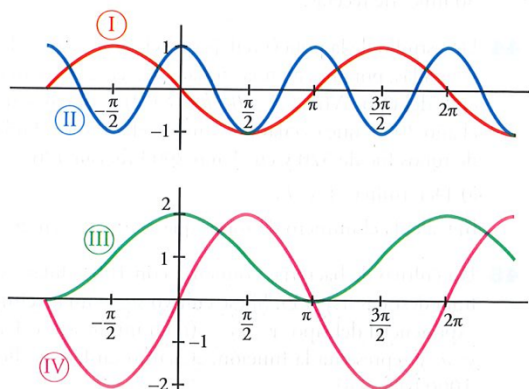
Funciones trigonométricas

- 21** Representa estas funciones:

a) $y = 1 + \sin x$ b) $y = -\cos x$

- 22** Asocia a cada una de las siguientes funciones, la gráfica que le corresponde:

a) $y = \cos 2x$ b) $y = -\sin x$
c) $y = 2\sin x$ d) $y = 1 + \cos x$



Para resolver

- 23** Halla la función inversa de las siguientes funciones y di, en cada caso, su dominio de definición:

a) $y = \frac{3}{x+2}$ b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
c) $y = 1 + \frac{2}{x}$ d) $y = \sqrt{x^2 + 4}, x \geq 0$
e) $y = 2x^3 - 1$ f) $y = x^2 - 4, x \leq 0$

- 24** Representa y halla la función inversa en cada caso.

a) $y = 3 + 2^{x-1}$ b) $y = 0,2 \cdot 2^{3-x}$
c) $y = 1,8 \cdot 5^{0,2x}$ d) $y = 1 + \log_2 (x + 4)$
e) $y = \ln (3x + 2)$ f) $y = 2,5 \cdot e^{-x/2}$

- 25** La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos $(0; 0,5)$ y $(1; 1,7)$. Calcula k y a , y representa la función.

- 26** Los puntos $(1; 1,2)$ y $(2; 0,48)$ pertenecen a la gráfica de la función $y = k \cdot a^x$.

- a) Calcula k y a .
b) Halla el valor de x para el cual $y = 120$.

- 27** La gráfica de la función logarítmica $y = -2 + \log_b (x + a)$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(0, -2)$ y $(8, 0)$.

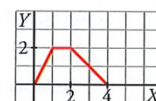
- a) Calcula a y b .
b) ¿Para qué valor de x es $y = 3$?

- 28** La función $y = a + b \ln x$ pasa por los puntos $(e, 5)$ y $(1/e, -1)$.

- a) Calcula a y b .
b) ¿Cuál es su función inversa?

- 29** La función $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ convierte grados Fahrenheit en grados centígrados. Halla la función para convertir grados centígrados en grados Fahrenheit.

- 30** Esta gráfica representa la variación de un movimiento que se repite periódicamente.



- a) Representala en el intervalo $[0, 10]$.
b) Calcula $f(7)$, $f(10)$ y $f(20)$.

- 31** Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y : miles de bacterias, x : horas).

¿Cuántas había en el momento inicial? ¿Y al cabo de 10 horas? ¿Cuánto tardarán en duplicarse?

Ejercicios y problemas propuestos

- 32** La concentración de un fármaco en sangre viene dada por $y = 100 \cdot (0,94)^t$ (y en mg, t en h).
- Di cuál es la dosis inicial y la cantidad de ese fármaco que tiene el paciente al cabo de 3 horas.
 - Representa la función.
 - Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?
- 33** La cantidad de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 75 gramos, se puede calcular mediante la ecuación $C(t) = 75(0,62)^t$.
- ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que queden 10 gramos de material radiactivo?
 - Representa la función.
- 34** Un alumno de un curso de psicología sabe que el porcentaje de conocimientos que recordará t meses después de acabar el curso, se puede calcular mediante la función:
- $$R(t) = 94 - 46,8 \log(t - 1)$$
- Calcula el porcentaje que recordará 6 meses después de terminar el curso.
 - Representa la función.
- 35** Sabemos que la presión atmosférica varía con la altura. La ecuación $h(x) = 41,97(0,996)^x$ nos da la altura de una montaña, en kilómetros, si conocemos la presión atmosférica, x , en milibares.
- Si en la cima del Everest la presión es de 389 milibares, ¿cuál es la altura del Everest?
 - ¿Cuál será la presión en la cima de una montaña de 3 500 metros de altura?
- 36** La función $y = 80 \cdot 2^{-0,4t}$ nos da la cantidad (en gramos) de estroncio radiactivo en una muestra de agua en el instante t (en años).
- ¿Qué cantidad habrá al cabo de 10 años?
 - ¿Cuándo la cantidad actual se habrá reducido al 50%?
- 37** El número de ejemplares que se venden de un libro depende del dinero que se dedica a su publicidad. La función que da esta relación es:
- $$y = 2 + 0,5 \ln(x + 1); \quad x \text{ en miles de euros, } y \text{ en miles}$$
- Calcula cuántos ejemplares se venden si se invierten 20 000 € en publicidad.
 - ¿Cuánto habrá que invertir para vender 5 000 libros?
- 38** Un capital de 10 000 € se deposita en un banco al 6% de interés anual con pago mensual de intereses. Escribe la función que nos dice en cuánto se transformará ese capital en m meses. Calcula cuánto tarda en duplicarse el capital.
- 39** La población mundial ha crecido de forma exponencial desde 1650. La función $P(t) = 0,5 \cdot e^{0,0072t}$, t en años, $P(t)$ en miles de millones, nos da una buena aproximación de la población mundial hasta 2015.
- ¿Cuál era la población mundial en 1920?
 - Estima la población mundial en 2020, suponiendo que el crecimiento se mantenga estable.
- 40** El carbono 14 sirve para calcular la edad de los fósiles y otros objetos. La fórmula que se utiliza es $C = C_0 \cdot e^{-t \ln 2 / 5730}$, donde C_0 es la cantidad de carbono 14 que tenía el fósil cuando se formó y C la cantidad que tendrá dentro de t años.
- Si en un cierto fósil $C_0 = 500$ g, ¿cuántos gramos de carbono 14 tendrá dentro de 2 000 años?
 - Se llama periodo de semidesintegración al tiempo necesario para que la cantidad inicial se reduzca a la mitad. Calcula el periodo de semidesintegración del carbono 14.
- 41** El precio de un automóvil deportivo es de 24 000 €. Sabemos que se deprecia a un ritmo de un 12% anual.
- ¿Qué función da el valor del coche al cabo de t años?
 - ¿Cuándo llegará a la mitad del valor inicial?
- 42** Invertimos 20 000 € al 4,8% anual en una cuenta que se capitaliza semestralmente.
- Escribe la función que nos da el dinero que tendremos en la cuenta al cabo de t años.
 - ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el capital inicial aumente un 50%?
- 43** El número de recetas para medicamentos genéricos emitidas por los médicos del servicio de salud de una comunidad autónoma ha crecido exponencialmente desde 2005. La función es del tipo $f(t) = k e^{at}$. Calcula k y a sabiendo que en 2005 ($t = 0$) se emitieron 6,52 miles de recetas y en el 2008 fueron 9,84 miles. ¿En qué año se llegará a 50 miles de recetas?
- 44** Un estudio de la policía refleja que el número de robos en viviendas, por año, en una ciudad, decrece según una función del tipo $N(t) = A - B \cdot \log(t + 2)$. Sabemos que en el año 2000, que es cuando se inició el estudio, el número de robos fue de 520 y en el año 2003 fueron 476.
- Determina A y B .
 - Calcula el número de robos que se esperan en 2020.
- 45** Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = k e^{at}$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?

Ejercicios y problemas resueltos

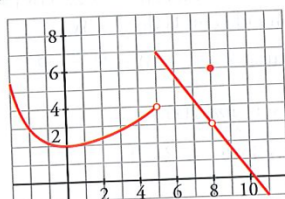
1. Cálculo del límite en un punto sobre la gráfica de una función

Calcular, sobre la gráfica de $f(x)$, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$

¿Es f continua en esos puntos?



a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. Además, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2 \rightarrow f$ es continua en $x = 0$.

b) Observamos que la función se aproxima a números distintos si damos a x valores menores o mayores que 5.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 7 \end{array} \right\} \text{ No existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \text{ porque } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

f es discontinua en $x = 5$; tiene un salto finito.

c) La situación es similar al caso a) pero el límite no coincide con el valor de la función en el punto: $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 3$ y $f(8) = 6$, luego $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) \neq f(8)$.

f es discontinua en $x = 8$. Tiene un punto desplazado.

2. Límites y continuidad de una función definida "a trozos"

Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar el límite en $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$.

b) Estudiar su continuidad.

a) • $x = -2$ es un "punto de ruptura". Por ello hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2 \end{cases} \quad \text{No coinciden; por tanto, no existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

• En $x = 0$, como $-2 < 0 < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$

• $x = 1$ es un "punto de ruptura". Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) = 2 \end{cases} \quad \text{Coinciden. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

b) f es discontinua en $x = -2$ porque no existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; en ese punto la función tiene un salto finito. También es discontinua en $x = 1$ porque no existe $f(1)$; le falta un punto, es una discontinuidad evitable.

Si $x \neq -2$ y $x \neq 1$, $f(x)$ es continua por estar definida mediante funciones polinómicas.

Hazlo tú. Halla el límite de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x < 3 \\ x-2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \text{ y en } x = 3. \text{ Estudia su continuidad.}$$

3. Cálculo del límite en un punto

Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

Hazlo tú. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1} = e^{0+1} = e$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$ Estudiamos el signo de f a la izquierda y a la derecha de 1.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,99; f(0,99) = \frac{3 \cdot 0,99 - 2}{0,99^2 - 1} < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2-1} = -\infty \\ x = 1,01; f(1,01) = \frac{3 \cdot 1,01 - 2}{1,01^2 - 1} > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-2}{x^2-1} = +\infty \end{array} \right\}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \frac{0}{0}$ Es una indeterminación; para resolverla, hay que simplificar la fracción.

$$\frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2}{x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x+2} = \frac{9}{5}$$

Ejercicios y problemas guiados

1. Límites de una función definida "a trozos"

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x - 5 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- Sabemos que $x \rightarrow +\infty$ significa que damos a x valores tan grandes como queramos (100, 1 000, ...). Ten en cuenta en qué "trozo" de la función se calculan esos valores y halla el límite en esa expresión.
- Razona de modo análogo en el caso $x \rightarrow -\infty$.
- En el caso de $x = 0$ hay que estudiar los límites laterales.

Solución: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -5$

2. Límites en el infinito

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x - 2}}$

Análisis del problema. Estamos ante cocientes de expresiones irracionales. Como en el caso de cocientes de polinomios, al calcular límites en el infinito solo importa el término de mayor grado del numerador y del denominador y sus coeficientes.

Estudia, en cada caso, el grado del numerador y del denominador y aplica la misma regla que en el cociente de polinomios. Ten en cuenta que $\sqrt[n]{x^p} = p/n$.

Solución: a) 5/2 b) 0 c) $+\infty$

3. Asíntotas

Determinar a y b para que las rectas $x = 2$ e $y = 4$ sean asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{ax - 5}{3x + b}$$

- Ten en cuenta que, para que exista asíntota vertical, el denominador debe ser igual a 0. Así obtendrás b .
- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en función de a e iguala su valor al de la asíntota horizontal.

Solución: $b = -6$; $a = 12$

4. Ramas infinitas

Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 1,5^x$

b) $f(x) = 0,4^x$

c) $f(x) = \ln(2x - 4)$

- a) y b) Recuerda que las funciones exponenciales son continuas en $\mathbb{R}$. Para hallar su límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, utiliza la calculadora dando a x valores "grandes" positivos y negativos y analiza los resultados que obtengas.
- c) Recuerda cómo es la gráfica de la función logarítmica. Determina el dominio de definición de f : $(a, +\infty)$. Estudia el valor de $f(x)$ en las proximidades de a y para valores grandes de x .

Solución:



5. Existencia de asíntotas

¿Tiene alguna asíntota la siguiente función?:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

¿Qué relación hay entre su gráfica y la de $g(x) = x^2 - 4$?

- Justifica por qué no tiene asíntota horizontal ni oblicua.
- Calcula el límite de f en el punto que anula el denominador y deduce si tiene asíntota vertical.
- Simplifica f y representa f y g . ¿Cuál es el dominio de cada una?

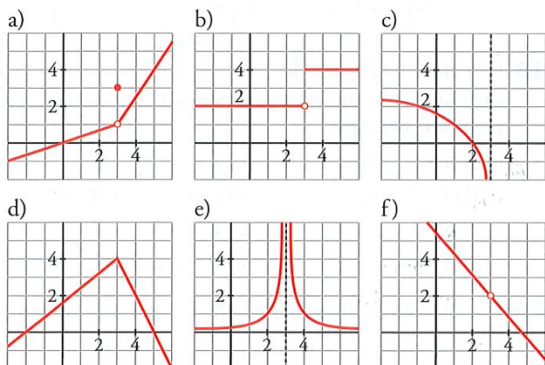
Solución: No tiene asíntotas. La gráfica de f es idéntica a la de g salvo en el punto $(3, 5)$. $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$; $\text{Dom } g = \mathbb{R}$.

Ejercicios y problemas propuestos

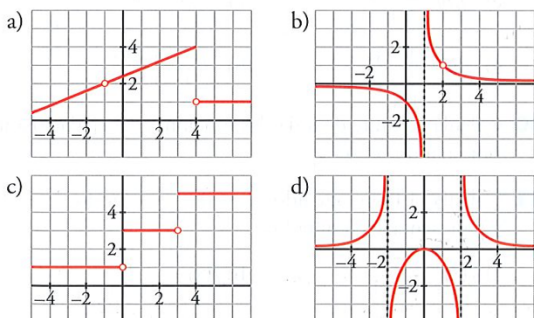
Para practicar

Continuidad y límite en un punto

1 ¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:



2 Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:



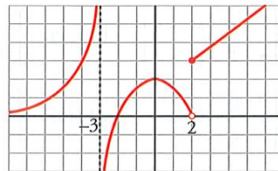
3 Comprueba que solo una de las siguientes funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
 c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4 Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2}$ b) $y = \frac{2}{x^4 + 3x^3}$
 c) $y = \sqrt{5 - 2x}$ d) $y = \ln(x + 4)$
 e) $y = 2^{3-x}$ f) $y = |x - 5|$

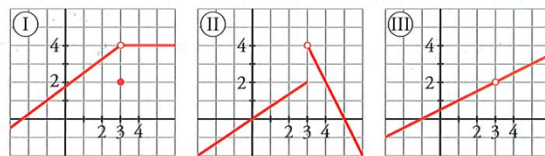
5 Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:



a) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

6 Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe



¿Alguna de ellas es continua en $x = 3$?

7 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$
 e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

8 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

9 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$
 b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$
 c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$
 d) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$
 e) $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x < 3 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

Ejercicios y problemas propuestos

10 Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

11 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

12 En la función $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ halla:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

13 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2-2x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+3x}{x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

14 Resuelve los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2+2x} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4-10x^2} \end{aligned}$$

15 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

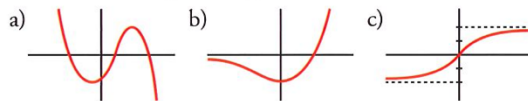
$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-3x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x^3+x^2} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x^2-4x+4} \end{aligned}$$

16 Calcula.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5 \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{\ln(x+e)} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 10} \log(2\sqrt{3x-5})^3 \end{aligned}$$

Límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$

17 Determina cuál es el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ en las siguientes gráficas:



18 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^3-10x & \text{b) } f(x) &= \sqrt{x^2-4} \\ \text{c) } f(x) &= 7-3x & \text{d) } f(x) &= -x^2+8x+9 \\ \text{e) } f(x) &= 1-(x-2)^2 & \text{f) } f(x) &= 7x^2-x^3 \\ \text{g) } f(x) &= (5-x)^2 & \text{h) } f(x) &= (x+1)^3-2x^2 \end{aligned}$$

19 Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} \end{aligned}$$

20 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

21 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ y representa los resultados.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{x^2}{x-1} & \text{b) } f(x) &= \frac{3x^2}{(x-1)^2} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{1}{x^2-10} & \text{d) } f(x) &= \frac{1-12x^2}{3x^2} \\ \text{e) } f(x) &= \frac{5-2x}{x^2+1} & \text{f) } f(x) &= \frac{1-x}{(2x+1)^2} \\ \text{g) } f(x) &= \frac{x^3-x^2}{7-x^2} & \text{h) } f(x) &= \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} \end{aligned}$$

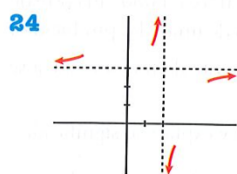
22 Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

23 Di cuál es el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{1}{x-2} & \text{b) } f(x) &= \frac{-3}{x^2+2x-4} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x}} & \text{d) } f(x) &= 3-\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Asíntotas



Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto de sus asíntotas.
Di cuáles son estas y describe su posición.

- 25** De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow -1^-, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{si } x \rightarrow -1^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$y = -2 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > -2 \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < -2 \end{cases}$$

Representa esta información.

- 26** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \frac{2x}{x-3}$ b) $y = \frac{x-1}{x+3}$

c) $y = \frac{2x+3}{4-x}$ d) $y = \frac{2}{1-x}$

e) $y = \frac{1}{2-x}$ f) $y = \frac{4x+1}{2x-3}$

- 27** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$ b) $y = \frac{3}{x^2+1}$

c) $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$ d) $y = \frac{x^4}{x-1}$

e) $y = \frac{-1}{(x+2)^2}$ f) $y = \frac{3x}{x^2-1}$

- 28** Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$ d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$ f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

- 29** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \frac{(3-x)^2}{2x+2}$ b) $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ d) $y = \frac{3x^2}{x+2}$

Para resolver

- 30** Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 31** Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + kx & \text{si } x < 2 \\ k - 5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x^2-5x} & \text{si } x \neq 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$

- 32** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{3-x} & \text{si } x \leq 3 \\ \log_2(x-2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- 33** Determina a y b para que esta función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 34** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

- 35** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $y = 2^{x+3}$ b) $y = 1,5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x} + 1$

e) $y = \log(x-3)$ f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \ln(2x+4)$ h) $y = \ln(x^2+1)$

Ejercicios y problemas propuestos

36 La función $p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ muestra

cómo varía la profundidad de la capa de arena de una playa desde la construcción de un dique (p en metros, t en años). Si la profundidad llega a superar los 4 m, se tendrá que elevar el paseo marítimo.

- Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.
- A largo plazo, ¿será necesario elevar la altura del paseo?

37 La siguiente función representa la valoración de una empresa, en millones de euros, en función del tiempo, t , en los últimos 13 años.

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0,1t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ a + 0,05(t - 5) & \text{si } 5 \leq t < 10 \\ 4,75 + 0,3(t - b) & \text{si } 10 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

- Calcula el valor de a y de b para que la valoración de la empresa sea una función continua del tiempo.
- ¿Cuál era el valor inicial de la empresa? ¿Y su valor a los 13 años?

38 El tipo de interés anual que ofrece una financiera depende del tiempo que el cliente esté dispuesto a mantener la inversión, y viene dado por la función $I(t) = \frac{6t}{t+1}$, $t > 0$, en años.

- Representa la función para un periodo de 10 años.
- ¿A qué valor tiende el interés si la inversión se mantiene a muy largo plazo?

39 En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en días).

- ¿Cuántos montajes realizará al terminar el periodo de entrenamiento que dura 20 días?
- Halla la asíntota horizontal y explica su significado.

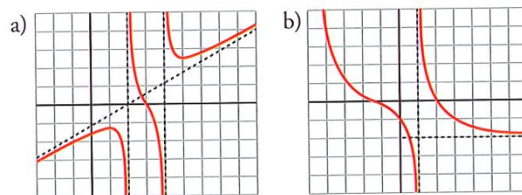
40 El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2 + 1}$ (t en días).

- Comprueba que la población aumenta la primera semana.
- Averigua si el crecimiento será indefinido o tiende a estabilizarse.

41 El coste de la producción de x unidades de un artículo viene dado por la función $C(x) = 0,5x + 1000$. El coste de una unidad depende del número de unidades producidas.

- ¿Cuál es la función que da el coste de una unidad si se producen x unidades?
- Calcula su asíntota horizontal y explica su significado.

42 Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:



43 Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíntota vertical: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

$$\text{diferencia } [f(x) - y] < 0 \text{ si } x \rightarrow \pm\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, f(x) > 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, f(x) > 2$$

44 Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = -1$ e $y = \frac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \frac{ax+3}{bx-4}$. Después, representa la posición de la curva respecto a ellas.

45 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, calcula los valores de a y de b para que f sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

46 Determina, en cada caso, cuál debe ser el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+3}{3x-1} = -1$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 - 2x + 7}{1 - 3x^2} = -2$

47 Estudia el tipo de discontinuidad que presenta la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} \text{ en } x = 3 \text{ y en } x = -3.$$

Ejercicios resueltos

2 Representar la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

de la cual sabemos que no tiene asíntotas verticales pero sí asíntota oblicua:

Como no tiene asíntotas verticales, conviene hallar sus puntos singulares antes de realizar un bosquejo de la curva.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ o } x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0$$

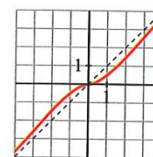
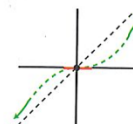
Único punto singular: (0, 0). No es máximo ni mínimo, es un "punto de inflexión".

No corta a los ejes coordenados en ningún otro punto.

Obtenemos más puntos:

(1; 0,5), (2; 1,6), (3; 2,7), (-1; -0,5), (-2; -1,6), (-3; -2,7)

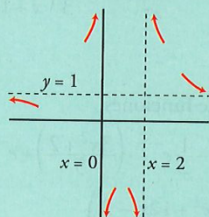
Ya podemos representarla con mucha precisión.



3 Representar la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

de la cual conocemos las asíntotas verticales, la asíntota horizontal y la posición de la curva respecto a ellas:



Con los datos anteriores, podemos realizar el siguiente bosquejo y, a partir de él, deducimos que la curva tendrá un mínimo a la izquierda de 0 y un máximo entre 0 y 2.

Veamos su localización, así como si hay otros puntos singulares además de estos.

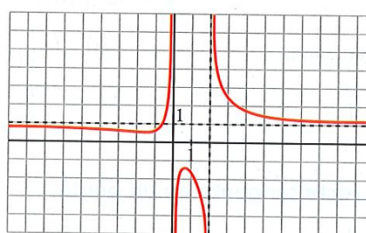
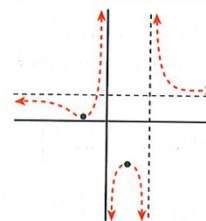
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$$

$$f(-1,62) \approx 0,62; \quad f(0,62) \approx -1,62$$

Los únicos puntos singulares son (-1,62; 0,62) y (0,62; -1,62). Con ellos podemos completar la representación:



Ejercicio propuesto

2 Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

e) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

f) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Ejercicios y problemas resueltos

1. Función derivada a partir de la definición

Demostrar que la función derivada de
 $f(x) = \frac{x+2}{x}$ es $f'(x) = \frac{-2}{x^2}$.

Hazlo tú. Dada $f(x) = \frac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.

Recordamos la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calculamos paso a paso:

$$f(x+h) = \frac{x+h+2}{x+h}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h+2}{x+h} - \frac{x+2}{x} = \frac{x^2 + xh + 2x - x^2 - xh - 2x - 2h}{x(x+h)} = \frac{-2h}{x(x+h)}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2h}{x(x+h)} : h = \frac{-2}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{x(x+h)} = \frac{-2}{x^2}. \text{ Por tanto, } f'(x) = \frac{-2}{x^2}.$$

2. Reglas de derivación

Hallar la función derivada de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}$

b) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{3x^2+2}{5}\right)$

c) $f(x) = \ln \frac{x}{(3x-1)^2}$

Hazlo tú. Halla $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

a) Expresamos la función como potencia y aplicamos la regla de derivación de una función elevada a una potencia.

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1/3} \cdot D\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1/3} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/3} \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-2}{3x^2} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$$

b) Aplicamos la regla de derivación del producto de funciones.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \cdot \left(\frac{3x^2+2}{5}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot D\left(\frac{3x^2+2}{5}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{3x^2+2}{5}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{6x}{5}\right) \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2+2}{5} + \frac{6x}{5}\right) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{-3x^2+12x-2}{10}\right) \end{aligned}$$

c) Aplicamos las propiedades del logaritmo de un cociente y de una potencia antes de derivar.

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{(3x-1)^2}\right) = \ln x - \ln (3x-1)^2 = \ln x - 2 \ln (3x-1)$$

$$f'(x) = \frac{D(x)}{x} - 2 \frac{D(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{x} - 2 \frac{3}{3x-1} = \frac{-3x-1}{x(3x-1)}$$

3. Ecuación de la recta tangente en un punto

Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = -3$.

• Calculamos la ordenada que corresponde a $x = -3$: $f(-3) = \frac{18}{-3+1} = -9$

• Hallamos la pendiente de la recta tangente en ese punto, $m = f'(-3)$.

$$f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \rightarrow f'(-3) = \frac{18-12}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Con el punto $P(-3, -9)$ y la pendiente $m = \frac{3}{2}$ escribimos la ecuación:

$$y = -9 + \frac{3}{2}(x+3)$$

4. Recta tangente paralela a una recta

Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 2$, se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$.

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

La pendiente de la recta tangente, $f'(a)$, debe ser igual a la pendiente de la cuerda, m .

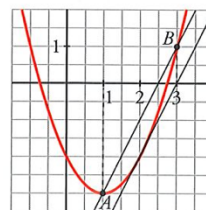
Hallamos los extremos de la cuerda: $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -3; A(1, -3) \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 1; B(3, 1) \end{cases}$

Pendiente de la cuerda: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{2} = 2$

$$f'(a) = 2a - 2 = 2 \rightarrow a = 2, f(2) = -2$$

La tangente en el punto $(2, -2)$ es paralela a la cuerda que une los puntos A y B . Por tanto, su ecuación, en forma punto-pendiente, es:

$$y = -2 + 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 6$$



Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

5. Puntos de tangente horizontal

Hallar los puntos de tangente horizontal de la función $f(x) = \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$.

Con ayuda de las ramas infinitas, decir si son máximos o mínimos.

■ Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 8 \rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos:

$$f(2) = \frac{-8}{3} + 12 - 16 + 16 = \frac{28}{3} \quad f(4) = \frac{-64}{3} + 48 - 32 + 16 = \frac{32}{3}$$

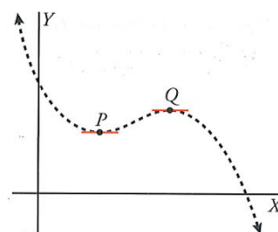
Los puntos pedidos son $P(2, \frac{28}{3})$ y $Q(4, \frac{32}{3})$.

■ Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16 = +\infty$$

Por tanto $P(2, \frac{28}{3})$ es un mínimo y $Q(4, \frac{32}{3})$ es un máximo.



Hazlo tú. Halla los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$ y di si son máximos o mínimos.

6. Coeficientes de una función que tiene puntos singulares

Calcular los coeficientes a , b , c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ para que pase por $(0, 5)$ y tenga un punto singular en $(2, -3)$.

Para hallar a , b , c tenemos que plantear, con las condiciones dadas, un sistema de tres ecuaciones cuyas incógnitas sean a , b , c .

• Si f pasa por $(0, 5)$, entonces $f(0) = 5$: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 5 \rightarrow c = 5$

• Si $(2, -3)$ es un punto singular, entonces $f'(2) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b \rightarrow 12a + b = 0$$

• Como el punto $(2, -3)$ pertenece a f , entonces: $f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c = -3$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} c = 5 \\ 12a + b = 0 \\ 8a + 2b + c = -3 \end{cases} \rightarrow c = 5, b = -6, a = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x + 5$.

Hazlo tú. Halla b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por $(1, 0)$ y $f'(1) = 5$.

Ejercicios y problemas resueltos

7. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de estas funciones:

a) $f(x) = x^3 - 12x - 8$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

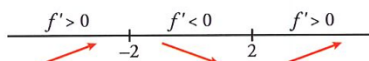
Hazlo tú. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$.

Análisis del problema. Si $f'(a) > 0$, f es creciente en $x = a$ y si $f'(a) < 0$, f es decreciente en $x = a$. Por tanto, tenemos que buscar los valores de x para los que $f'(x) > 0$ y aquellos para los que $f'(x) < 0$.

a) Hallamos los puntos de tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

Estudiamos el signo de f' en los intervalos cuyos extremos son las soluciones de $f'(x) = 0$:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; f decrece en $(-2, 2)$.

b) Buscamos los puntos donde $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 0. \text{ No tiene solución.}$$

Por tanto, f no tiene puntos de tangente horizontal.

Estudiamos el signo de f' en su dominio de definición, $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

Para cualquier $x \in \text{Dom}$, el numerador y el denominador de $f'(x)$ son positivos. Por ello, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom}$. Luego f es creciente en todo su dominio.

8. Gráfica de una función racional continua

Representar la función $f(x) = \frac{16x}{x^2+4}$.

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x . Por la misma razón, no tiene asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal: $y = 0$, porque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x}{x^2+4} = 0$.

• Posición de la curva con respecto a la asíntota:

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$



• Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{16(x^2+4) - 16x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-16x^2+64}{(x^2+4)^2}$$

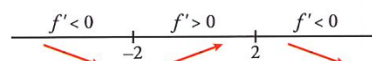
$$-16x^2 + 64 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2, & f(2) = 4 \\ x = -2, & f(-2) = -4 \end{cases}$$

• Estudiamos el signo de f' .

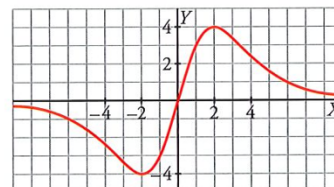
Si $x < -2$, $f'(x) < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty, -2)$.

Si $-2 < x < 2$, $f'(x) > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(-2, 2)$.

Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $(2, +\infty)$.



Por tanto, la curva tiene un mínimo en $(-2, -4)$ y un máximo en $(2, 4)$.



Hazlo tú. Estudia y representa la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

9. Estudio y representación de una función polinómica

Estudiar y representar esta función:

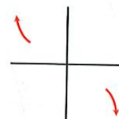
$$f(x) = 3 - (2 + x)^3$$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [3 - (2 + x)^3] = -\infty$$

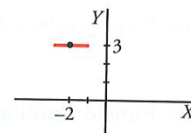
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [3 - (2 + x)^3] = +\infty$$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = -3(2 + x)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Como $f(-2) = 3$, en el punto $(-2, 3)$ la tangente es horizontal.

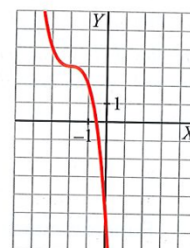


- Crecimiento y decrecimiento:

Estudiamos el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = -3(2 + x)^2 < 0 \text{ para cualquier valor de } x.$$

Por tanto, f es decreciente en todo su dominio; y el punto $(-2, 3)$ no es máximo ni mínimo.



- Cortes con los ejes:

$$x = 0 \rightarrow y = -5$$

$$y = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} - 2 \approx -0,6$$

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$f(x) = 1 + (x - 3)^3$$

10. Estudio y representación de una función racional

Estudiar y representar esta función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$$

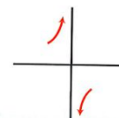
- La función no está definida en $x = 0 \rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical, $x = 0$.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow -\infty$$



- Asíntotas horizontales y oblicuas:

Tiene asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. Dividimos:

$$f(x) = x - \frac{4}{x} \rightarrow \text{La asíntota es } y = x.$$

$$\text{Posición} \begin{cases} \text{si } x = 100 \rightarrow f(x) - x = 99,96 - 100 < 0. \text{ Curva bajo la asíntota.} \\ \text{si } x = -100 \rightarrow f(x) - x = -99,96 + 100 > 0. \text{ Curva sobre la asíntota.} \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0$$

No tiene solución. No tiene puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:

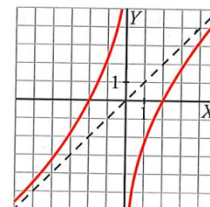
$$f'(x) > 0 \text{ para cualquier valor de } x \neq 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- Cortes con los ejes:

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \rightarrow P(2, 0) \\ x = -2 \rightarrow Q(-2, 0) \end{cases}$$

No corta al eje Y .



Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

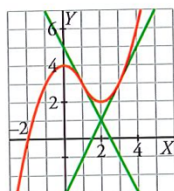
$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

Ejercicios y problemas guiados

1. Derivadas sobre la gráfica

Observando la gráfica de la derecha, de $y = f(x)$, sobre la que se han trazado las tangentes en $x = 1$ y en $x = 3$:

- Hallar el valor de $f'(1)$ y $f'(3)$.
- ¿Para qué valores de x es $f'(x) = 0$?
- ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?



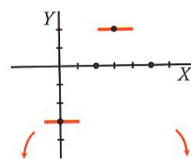
- Sabes que la derivada es igual a la pendiente de la recta tangente. Toma dos puntos en cada recta y halla su pendiente.
- Si $f'(x) = 0$, la recta tangente será horizontal. ¿En qué puntos ocurre esto?
- Si $f'(x) < 0$, la función decrece. Expresa como intervalo el tramo donde decrece.

Solución: a) $f'(1) = -2$, $f'(3) = 2$ b) Para $x = 0$ y $x = 2$ c) $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2)$

2. Función polinómica

Representar una función polinómica sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son $(0, -3)$ y $(3, 2)$, y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.

- Justifica por qué no puede tener asíntotas.
- Representa la información de forma esquemática.
- Intenta trazar la curva desde $-\infty$ a $+\infty$ y razona si los puntos de tangente horizontal pueden ser máximos o mínimos.



Solución:

$(3, 2)$ es un máximo; $(0, -3)$ no es máximo ni mínimo.

3. Función cuadrática

Hallar la función de segundo grado que pase por $(0, 2)$ y tal que la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, -3)$ valga -1 .

La ecuación de una función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$.

- Escribe la condición para que pase por los puntos $(0, 2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente de la recta tangente es igual al valor de la derivada de la función en el punto de tangencia $f'(1) = -1$.
- Resuelve el sistema formado por estas tres condiciones y obtendrás a , b y c .

Solución: $a = 4$, $b = -9$, $c = 2$

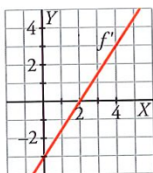
4. Gráfica de la función derivada

Esta es la gráfica de f' , función derivada de f :

- Obtener $f'(0)$ y $f'(4)$.

- ¿Tiene f algún punto singular?

- Estudiar el crecimiento de f .



- Sobre la gráfica de f' busca el valor de la ordenada en $x = 0$ y en $x = 4$.
 - ¿Hay algún punto en el que $f'(x) = 0$?
 - Si $f'(x) > 0$, su gráfica estará sobre el eje X . Para esos valores de x , f es creciente.
- Solución:** a) $f'(0) = -3$, $f'(4) = 3$
b) Sí, en $x = 2$.
c) Crece en $(2, +\infty)$.

5. Máximo y mínimo en un intervalo

Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

Análisis del problema: Si una función está definida en $[a, b]$, su valor máximo (o mínimo) está en $x = a$ o $x = b$, o bien en un punto singular que esté dentro del intervalo.

- Calcula el valor de la función en los extremos del intervalo $[0, 3]$.
- Halla los puntos singulares de la función y descarta los que no estén en $[0, 3]$.
- Compara el valor de la función en los puntos singulares con los obtenidos en $x = 0$ y $x = 3$ y decide cuál es el máximo y cuál el mínimo.

Solución: Máximo, $f(3) = 19$; mínimo, $f(1) = -1$.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Tasa de variación media

- 1 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

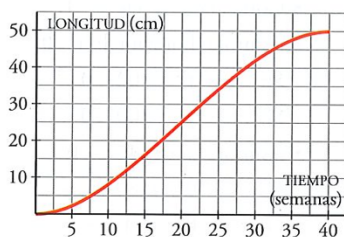
a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = (2-x)^3$
c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = 2^x$

- 2 a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en el intervalo $[1, 1+h]$.

- b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo $[1; 1,5]$ utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

- 3 Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

- 4 Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos $[5, 15]$ y $[20, 30]$ y di en qué periodo es mayor el crecimiento:

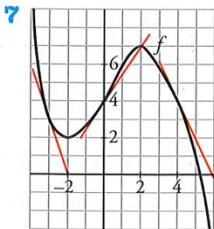


Definición de derivada

- 5 Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$
c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

- 6 Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3x-7}$.



Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

- a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?
b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?
c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

- 8 Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \frac{(5x-3)}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{3}$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

Reglas de derivación

- 9 Halla la función derivada de las siguientes funciones y simplifica cuando sea posible:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$ b) $f(x) = 3e^{2x}$
c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$ f) $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$
g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$
i) $f(x) = \frac{e^{x-3}}{5}$ j) $f(x) = \left(\frac{3-x}{x}\right) \log_2 x$

- 10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x-2)^3$ b) $f(x) = 3 \cos(x + \pi)$
c) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x}}$ f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$
g) $f(x) = \lg(3x)$ h) $f(x) = x \cdot \sin x^2$
i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$ j) $f(x) = (x + \ln x)^2$

- 11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$ b) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$
c) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $f(x) = \left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^2$
e) $f(x) = \frac{x}{3} \log_2(1-x^2)$ f) $f(x) = e^{-x} \ln \frac{1}{x}$
g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x+2)^2}$ h) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{4x} - \frac{x}{2}\right)$

- 12 Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$
c) $f(x) = \ln(1-3x^2)^4$ d) $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{5x-x^2}$
e) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ f) $f(x) = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$
g) $f(x) = \log_2 \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$ h) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Ejercicios y problemas propuestos

Recta tangente y recta normal

13 Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \ln x$ en $x = e^2$

e) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{2}$

14 Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x-1)$

15 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f , que sea paralela a la recta dada.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

16 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \frac{x^2+1}{x}$

f) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

18 Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$

b) $f(x) = 12x - 3x^2$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

19 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:

a) $y = x^3 + 3x$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \ln x$

20 Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

b) $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$

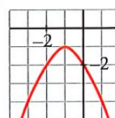
d) $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \frac{3}{x^2+1}$

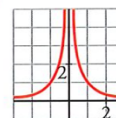
f) $y = \frac{x^3+4}{x}$

21 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:

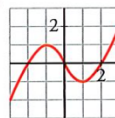
a)



b)



c)



Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:

- Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Corta al eje X en $x = 1$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0$
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$
- Asíntota vertical: $x = 0$
Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$
Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$
- Mínimo en $(2, 1)$

23 Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:

- Asíntota vertical: $x = 2$
Si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$
Si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$
- Asíntota oblicua: $y = x$
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$

¿Tiene máximo o mínimo la función que has representado?

24 Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que:

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Sus puntos de tangente horizontal son $(-3, 2)$ y $(1, 5)$.

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

25 Representa una función polinómica de la que sabemos:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 solo en $(-2, 2)$ y en $(2, -1)$.
- Corta a los ejes solo en $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

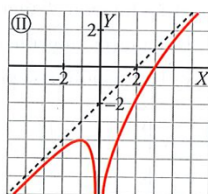
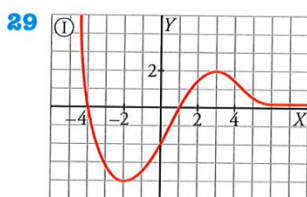
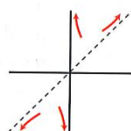
26 Representa una función continua $y = f(x)$ tal que:

- Sus puntos de tangente horizontal son $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

- Sus ramas infinitas son así:

27 Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

28 Comprueba que la función $y = \frac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Representala.



Observa estas gráficas y describe:

- Sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.
- Sus puntos singulares, crecimiento y decrecimiento.

30 Dada la función $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:

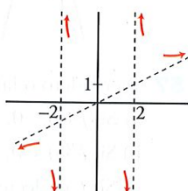
- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- La posición de la curva respecto a la asíntota es:
Si $x \rightarrow -\infty$, $y < 2$ Si $x \rightarrow +\infty$, $y < 2$

Representala.

31 Completa la gráfica de una función que tiene tres puntos singulares:

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right), (0, 0), \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y cuyas ramas infinitas son las representadas a la derecha.



Para resolver

32 a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

b) Halla las coordenadas del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

33 Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

34 Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

35 Halla a , b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

36 La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

37 Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.

38 Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
- $f(x) = x^4 + 4x^3$
- $f(x) = 12x - x^3$
- $f(x) = -x^4 + 4x^2$

39 Estudia y representa.

- $y = x^3 - 3x + 2$
- $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
- $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$
- $y = x^4 - 8x^2 + 2$

40 Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Representalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

- $y = \frac{x-3}{x+2}$
- $y = \frac{x^2-1}{x}$
- $y = \frac{x^3}{3} + 4x$
- $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

41 Estudia y representa las siguientes funciones:

- $y = \frac{x}{x^2-16}$
- $y = \frac{x}{1-x^2}$
- $y = \frac{x+2}{x^2-6x+5}$
- $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$
- $y = \frac{x^2-1}{x+2}$
- $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

Ejercicios y problemas propuestos

42 Calcula el valor de a para que $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.

43 La función $h(t) = 50 + 30t - 5t^2$ (h en metros, t en segundos) muestra la altura de una pelota lanzada hacia arriba.

- Calcula su velocidad media entre $t = 0$ y $t = 2$.
- ¿En qué instante la velocidad es igual a 0?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza y en qué momento lo consigue?

44 El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

El coste medio por unidad es: $M(q) = \frac{C(q)}{q}$

- ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?
- Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

45 La función $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

- Representala gráficamente.
- Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
- ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

46 El coste de producción, en una empresa de electrodomésticos, de x unidades fabricadas, viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10000$, $C(x)$ en euros. El precio de venta de una unidad es 880 €.

- Escribe la función que nos da el beneficio de la empresa si se venden todas las unidades fabricadas.
- ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será ese beneficio?

47 Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.

- $y = x^2 - 6x - 4$, $x \in [0, 5]$
- $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$, $x \in [-1, 4]$
- $y = x^3 - 3x^2$, $x \in [-2, 4]$
- $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in [0, 2]$

48 El área de un rectángulo, en función de su base x , viene dada por la expresión $S(x) = 20x - x^2$, $x \in [8, 18]$. Halla el área máxima y el área mínima en ese intervalo.

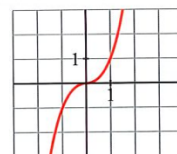
Cuestiones teóricas

49 Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x .

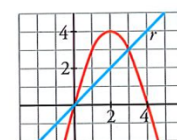
50 Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

51 Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.

- ¿Tiene algún punto singular?
- ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?
- ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?



52 ¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r ? En caso afirmativo, hállalo.

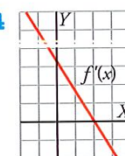


53 Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

- La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.
- La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.
- La función pasa por el punto $(2, 0)$.

54 Esta es la gráfica de f' , la función derivada de f .

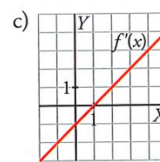
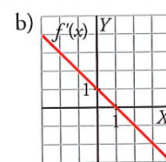
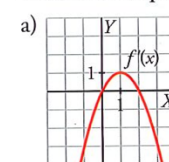
- ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?
- ¿Dónde es f creciente? ¿Y decreciente?



55 Sabemos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?

- $\frac{1}{e}$
- 0
- 1

56 ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?



57 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.
- Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) \leq 0$.

