



ACTIVIDADES DE
RECUPERACIÓN DE
LA MATERIA PENDIENTE

MATEMÁTICAS I
(Ciencias y Tecnología)



ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN DE LA MATERIA PENDIENTE MATEMÁTICAS I

ACTIVIDADES DE LA PRIMERA EVALUACIÓN	
UNIDADES DEL LIBRO	EJERCICIOS PROPUESTOS
Unidad 10	Página 267 y siguientes 1,2,3,8,12,13,15,16,22,23,24,25,27,29,35,47,50
Unidad 11	Página 295 y siguientes 2,7,9,10,12,13,14,15,19,20,21,22,26,27,30,32,34,35,40,42
Unidad 12	Página 326 y siguientes 5,9,10,11,12,13,15,16,18, 21, 28, 35,39,41,42,43,45,57,58.

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \frac{2}{(x+5)^2}$

b) $y = \frac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \frac{x}{x^2-x+2}$

d) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$

b) $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

3 Di cuál es el dominio de definición de:

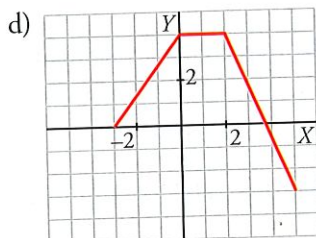
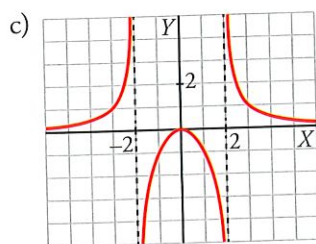
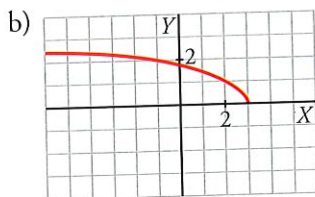
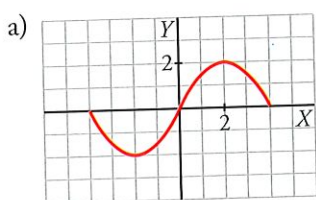
a) $y = 3 + 2^{1-x}$

b) $y = \log_2(x+3)$

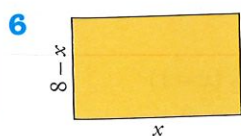
c) $y = \ln(2-x)$

d) $y = \sqrt{2^x}$

4 Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:



5 La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t , hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?



Escribe el área de este rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x .

¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

7 La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37°C ha evolucionado según la función $T = -0,1t^2 + 1,2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Funciones elementales

8 Asocia a cada gráfica su expresión analítica.

a) $y = 1,5^x$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \frac{x^2}{3} - 1$

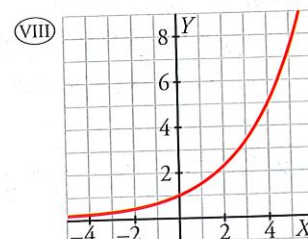
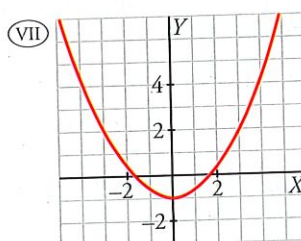
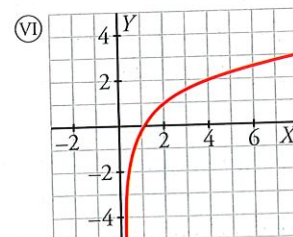
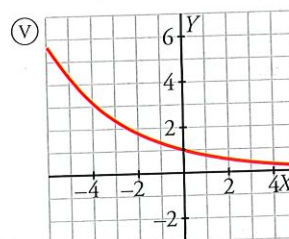
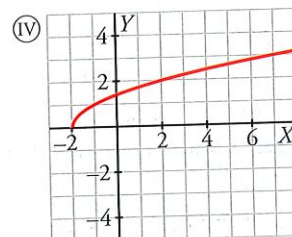
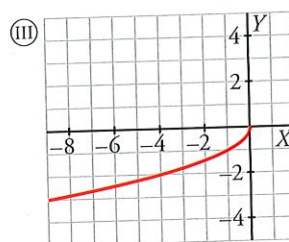
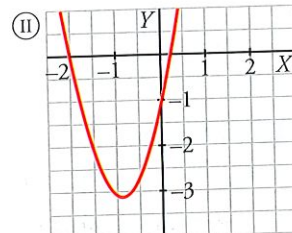
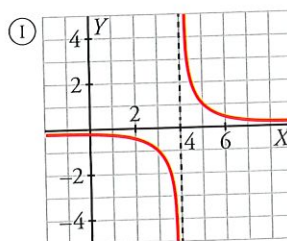
d) $y = \frac{1}{x-4}$

e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = 0,75^x$

g) $y = \log_2 x$

h) $y = -\sqrt{-x}$



9 Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = 0,5x^2 - 2x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = -1,5x^2 - 3x - 2$

10 Representa estas funciones en el intervalo indicado:

a) $y = 2x^2 - 4$, $[0, 2]$

b) $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$

c) $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = 0,6^x$, $[-3, 3]$

e) $y = \log_2 x$, $(0, 7]$

f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

Ejercicios y problemas propuestos

■ Funciones definidas "a trozos"

11 Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$a) y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x < 2 \\ 2x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

12 Representa.

$$a) y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

13 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

$$a) y = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -x^2-4x-2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

14 Representa la función $y = |x-5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:

$$y = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x-5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

15 Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":

$$a) y = |4-x| \quad b) y = |3x+6|$$

$$c) y = \left| \frac{x-3}{2} \right| \quad d) y = |-x-1|$$

16 Representa estas funciones:

$$a) y = |x^2-1| \quad b) y = |x^2-4x|$$

$$c) y = |x^2+2x-3| \quad d) y = |x^2-2x+1|$$

17 Representa.

$$a) y = \left| \frac{1}{x} \right| \quad b) y = |\log_2 x|$$

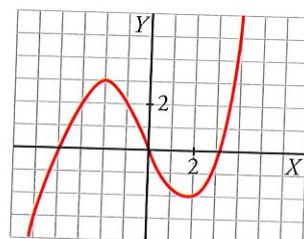
$$c) y = \frac{|x|}{x} \quad d) y = 2|x| + x$$

■ Transformaciones de una función

18 Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:

$$a) g(x) = f(x) - 3 \quad b) h(x) = f(x+2)$$

19 Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa, a partir de ella, las funciones:

$$a) y = f(x-1) \quad b) y = f(x) + 2$$

20 A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:

$$a) g(x) = f(x) - 2 \quad b) h(x) = f(x-3)$$

$$c) i(x) = -f(x) \quad d) j(x) = |f(x)|$$

21 Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:

$$a) g(x) = f(x+1) \quad b) h(x) = f(x) - 3$$

22 Representa las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{1}{x+1} \quad b) y = \frac{1}{x-1}$$

$$c) y = \frac{-1}{x} \quad d) y = \frac{-1}{x-3}$$

23 Representa las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{x-1} \quad b) y = -\sqrt{x+3}$$

$$c) y = 2 + \sqrt{x} \quad d) y = 1 - \sqrt{x}$$

24 Representa estas funciones:

$$a) y = 2^x + 1 \quad b) y = 2^x - 3$$

$$c) y = 2^{x-1} \quad d) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$$

$$e) y = 1 - 2^x \quad f) y = 2^{-x}$$

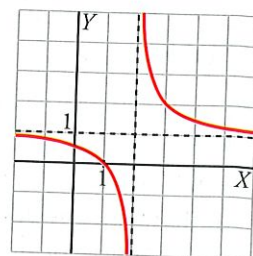
25 Representa las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = \log_2 x$:

$$a) y = 1 + \log_2 x \quad b) y = \log_2 (x-1)$$

$$c) y = -\log_2 x \quad d) y = \log_2 (-x)$$

26 La expresión analítica de esta función es del tipo $y = \frac{1}{x-a} + b$.

Observa la gráfica y di el valor de a y b .



En la web



Ejercicios para relacionar la representación gráfica de una función con su expresión analítica.

Composición y función inversa

27 Dadas las funciones

$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \frac{3}{x-2} \quad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obten las expresiones de:

- a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$
 d) $g \circ h$ e) $h \circ f$ f) $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en $x = 5$ y en $x = 0$.

28 Explica cómo a partir de las funciones

$$f(x) = 2^{x-1} \quad g(x) = \sqrt{x} + 2 \quad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

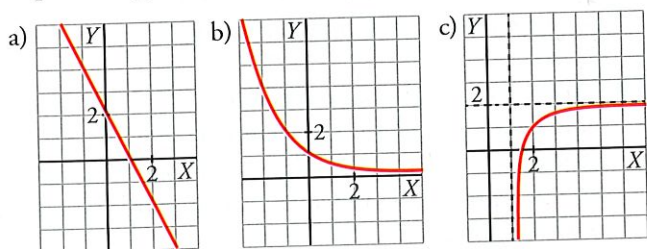
se pueden obtener estas otras:

- a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$
 c) $p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$ d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$
 e) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ f) $s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

29 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

- a) $y = 3x - 2$ b) $y = \frac{x+3}{2}$
 c) $y = \sqrt{2x+1}$ d) $y = 1 + 2^x$
 e) $y = 2 + \log_3 x$ f) $y = 4 - x^2, x \geq 0$

30 Representa gráficamente la función inversa en cada caso:



31 Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:

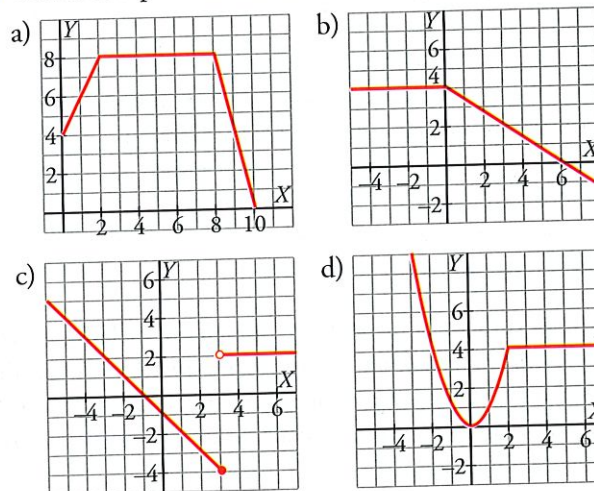
- a) $f(x) = \frac{1}{x+2}; f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$
 b) $f(x) = \sqrt{2x+3}; f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$
 c) $f(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}; f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

32 Considera la función $y = \sqrt{x+2}, x \in [-2, 7]$.

- a) ¿Cuál es su recorrido?
 b) Obtén su función inversa, y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

Para resolver

33 Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:



34 Representa las siguientes funciones partiendo de una más sencilla y realizando transformaciones sobre ella:

- a) $y = \frac{3x}{x-1}$ b) $y = \frac{x-2}{x-4}$
 c) $y = \frac{3x+2}{x+1}$ d) $y = \frac{x+1}{x-1}$

35 La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).

- a) Calcula k y a . b) Representa la función.

36 Determina, en cada caso, la ecuación de la parábola de la que conocemos el vértice y otro punto.

- a) $V(1, -4), P(-1, 0)$ b) $V(-2, 3), P(0, 6)$

37 Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:

- a) $y = \arcsen 0,8$ b) $y = \arcsen (-0,9)$
 c) $y = \arccos 0,36$ d) $y = \arccos (-0,75)$
 e) $y = \operatorname{arctg} 3,5$ f) $y = \operatorname{arctg} (-7)$

38 Obtén el valor de y en grados, sin usar la calculadora:

- a) $y = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $y = \arccos \frac{1}{2}$
 c) $y = \operatorname{arctg} 1$ d) $y = \arcsen (-1)$
 e) $y = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$ f) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$

39 Calcula en radianes.

- a) $\arcsen \left(\sen \frac{\pi}{4}\right)$ b) $\arccos (\cos \pi)$
 c) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}\right)$ d) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 1)$
 e) $\sen (\arccos (-1))$ f) $\arccos (\operatorname{tg} \pi)$

Ejercicios y problemas propuestos

40 En un triángulo equilátero de 10 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos equiláteros de lado x . Escribe el área del hexágono que resulta en función de x . ¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

41 Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor, en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Di cuál es su dominio y su recorrido.



42 En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2,5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1,5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0,25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

43 La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

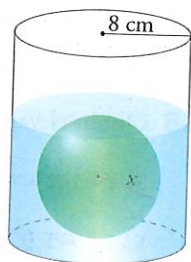
a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

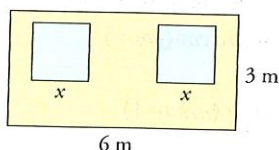
44 En un cilindro de radio 8 cm, depositamos una bola esférica de radio x y echamos agua hasta que cubra la bola.

Escribe la función que da la cantidad de agua que hay que echar según la medida del radio de la bola.

¿Cuál es su dominio de definición?



45 En una pared de dimensiones 6 m $\times$ 3 m se quieren abrir dos ventanas cuadradas de lado x .



a) Expresa el área que queda de pared, una vez hechas las ventanas, en función de x .

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

46 Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$, donde t es la hora de visita. Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1500 visitantes, halla B y C y representa la función.

47 El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

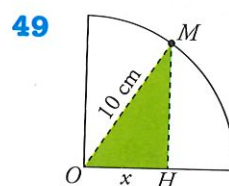
b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

48 Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?



En un cuarto de circunferencia de 10 cm de radio tomamos un punto M y construimos el triángulo rectángulo OMH .

Expresa el área de ese triángulo según la medida del cateto x . ¿Cuál es su dominio de definición?

50 Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5000 bacterias?

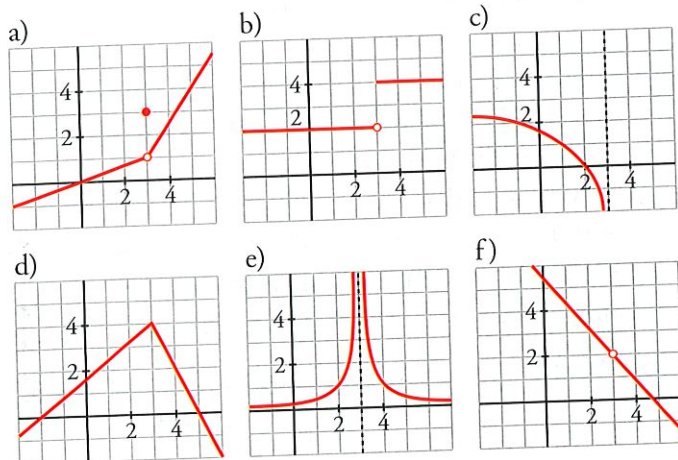
51 Un negocio en el que invertimos 10000 €, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?

52 Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T , del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función. ¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

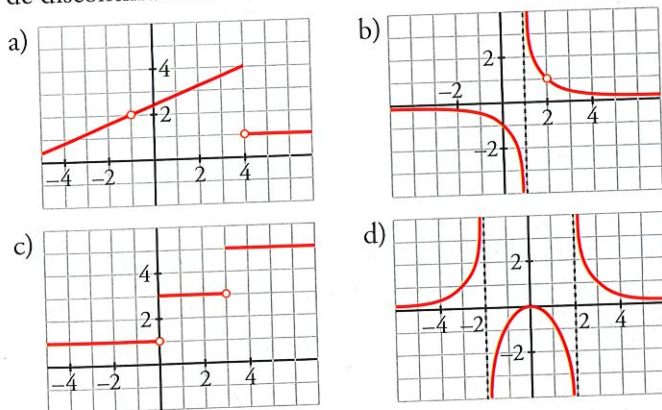
Para practicar

Continuidad y límite en un punto

- 1 ¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:



- 2 Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:



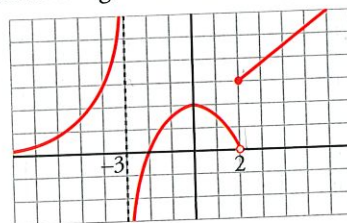
- 3 Comprueba que solo una de las siguientes funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

- 4 Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sqrt{x^2 + 2} & \text{b) } y &= \frac{2}{x^4 + 3x^3} \\ \text{c) } y &= \sqrt{5 - 2x} & \text{d) } y &= \ln(x + 4) \\ \text{e) } y &= 2^{3-x} & \text{f) } y &= |x - 5| \end{aligned}$$

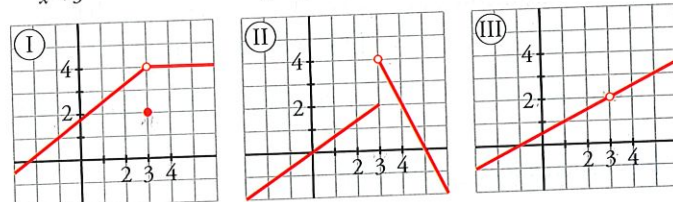
- 5 Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:



$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) & \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \end{aligned}$$

- 6 Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4 \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe}$$



¿Alguna de ellas es continua en $x = 3$?

- 7 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2} \right) & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0.5} 2^x \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} e^x \end{aligned}$$

- 8 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

- 9 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 3-x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \text{ en } x = -1 \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } x = 1 \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x = 0 \\ \text{d) } f(x) &= \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x = 2 \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} 5-x & \text{si } x < 3 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \text{ en } x = 3 \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas propuestos

10 Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

11 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

12 En la función $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ halla:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

13 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2-2x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+3x}{x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

14 Resuelve los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2+2x} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4-10x^2} \end{aligned}$$

15 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

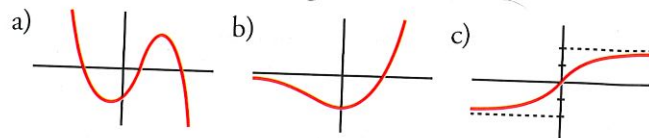
$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-3x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x^3+x^2} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x^2-4x+4} \end{aligned}$$

16 Calcula.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5 \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin x}}{1+\cos x} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 10} \log(2\sqrt{3x-5})^3 \end{aligned}$$

Límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$

17 Determina cuál es el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ en las siguientes gráficas:



18 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^3 - 10x & \text{b) } f(x) &= \sqrt{x^2-4} \\ \text{c) } f(x) &= 7-3x & \text{d) } f(x) &= -x^2+8x+9 \\ \text{e) } f(x) &= 1-(x-2)^2 & \text{f) } f(x) &= 7x^2-x^3 \\ \text{g) } f(x) &= (5-x)^2 & \text{h) } f(x) &= (x+1)^3-2x^2 \end{aligned}$$

19 Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} \end{aligned}$$

20 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

21 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ y representa los resultados.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{x^2}{x-1} & \text{b) } f(x) &= \frac{3x^2}{(x-1)^2} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{1}{x^2-10} & \text{d) } f(x) &= \frac{1-12x^2}{3x^2} \\ \text{e) } f(x) &= \frac{5-2x}{x^2+1} & \text{f) } f(x) &= \frac{1-x}{(2x+1)^2} \\ \text{g) } f(x) &= \frac{x^3-x^2}{7-x^2} & \text{h) } f(x) &= \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} \end{aligned}$$

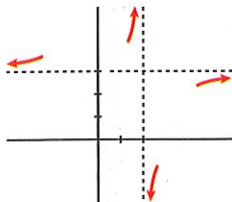
22 Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

23 Di cuál es el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{1}{x-2} & \text{b) } f(x) &= \frac{-3}{x^2+2x-4} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x}} & \text{d) } f(x) &= 3-\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Asíntotas

- 24**  Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto de sus asíntotas. Di cuáles son estas y describe su posición.

- 25** De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow -1^-, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{si } x \rightarrow -1^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$y = -2 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > -2 \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < -2 \end{cases}$$

Representa esta información.

- 26** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \frac{2x}{x-3}$

b) $y = \frac{x-1}{x+3}$

c) $y = \frac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \frac{2}{1-x}$

e) $y = \frac{1}{2-x}$

f) $y = \frac{4x+1}{2x-3}$

- 27** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$

b) $y = \frac{3}{x^2+1}$

c) $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \frac{x^4}{x-1}$

e) $y = \frac{-1}{(x+2)^2}$

f) $y = \frac{3x}{x^2-1}$

- 28** Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

- 29** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \frac{(3-x)^2}{2x+2}$

b) $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

d) $y = \frac{3x^2}{x+2}$

Para resolver

- 30** Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \leq 3 \\ x+k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6-(x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2+kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 31** Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición. Estudia después su continuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x^2-5x} & \text{si } x \neq 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

- 32** Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Representa las:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{2-\sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ \log_2(x-2) & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- 33** Determina a y b para que esta función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ ax-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 34** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

- 35** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $y = 2^{x+3}$

b) $y = 1,5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$

d) $y = e^{-x} + 1$

e) $y = \log(x-3)$

f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \ln(2x+4)$

h) $y = \ln(x^2+1)$

Ejercicios y problemas propuestos

- 36** Halla el límite de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a) $f(x) = \frac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

b) $g(x) = \frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

c) $h(x) = \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2}$

¿Cuáles son las asíntotas de f , de g y de h ?

- 37** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2 + 6)}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x - 2)^2}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3}$

- 38** Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$. Di cuáles son sus asíntotas y sitúa la curva respecto a ellas.

- 39** En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t + 4}$ (t en días).

- a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?
b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.
c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

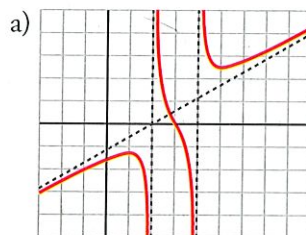
- 40** El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2 + 1}$ (t en días).

- a) Comprueba que la población aumenta la primera semana.
b) Averigua si el crecimiento será indefinido o tiende a estabilizarse.

- 41** Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = 3$ e $y = \frac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \frac{ax + 3}{bx - 4}$.
¿Puede tener asíntota oblicua?

- 42** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$, calcula el valor de a y de b para que f sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- 43** Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:



- 44** Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $f(x) < 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $f(x) > -1$

- c) Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

diferencia $[f(x) - y] < 0$ si $x \rightarrow \pm\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

- 45** Considera las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$ definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Halla las asíntotas de las funciones $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; $g(x) = \frac{1}{\cos x}$; $h(x) = \frac{1}{1 - 2\cos x}$ y sitúa la curva respecto a ellas.

- 46** Calcula el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{x + 1} - ax$ sea un número real.

- 47** Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^5}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + 3)}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^4)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x^2)$

- 48** La función $f(x) = \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ es discontinua en $x = 3$ y $x = -3$.

Estudia el tipo de discontinuidad que presenta en esos puntos según los valores de m .

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Tasa de variación media

- 1 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

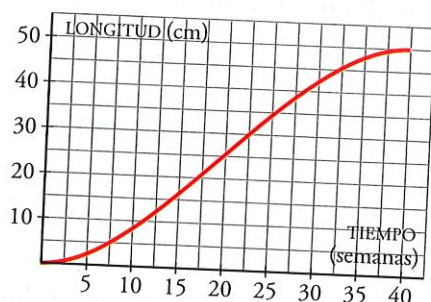
a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = (2-x)^3$
c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = 2^x$

- 2 a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en el intervalo $[1, 1+h]$.

- b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo $[1; 1,5]$ utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

- 3 Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

- 4 Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos $[5, 15]$ y $[20, 30]$ y di en qué periodo es mayor el crecimiento:

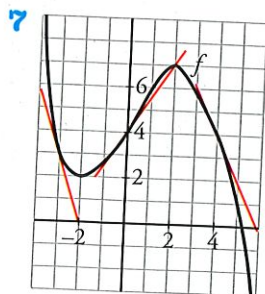


Definición de derivada

- 5 Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$
c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x+2)^2$

- 6 Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3x-7}$.



Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

- a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?
b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?
c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

- 8 Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \frac{(5x-3)}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$
c) $f(x) = x^3 - 5x$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

Reglas de derivación

- 9 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$ b) $f(x) = 3 \cos(2x + \pi)$
c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$ f) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ j) $f(x) = \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{sen} 2x$

- 10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x-2)^3$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3x} + \frac{x}{3}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$ d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$ f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$ h) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$ j) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2}{3}$

- 11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arc} \cos e^x}$ b) $f(x) = \log(\operatorname{sen} x^2)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + e^{\cos x}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln \operatorname{tg} x$ f) $f(x) = 3 \cos(\ln x)$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ h) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7\sqrt{x} + \frac{\cos x}{x^2}$ j) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- 12 Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

c) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$

e) $f(x) = \log(\operatorname{tg} x)^2$

f) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Recta tangente y recta normal

13 Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \ln x$ en $x = e^2$

e) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{3}$

14 Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x-1)$

15 Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f , que sea paralela a la recta dada.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

16 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \frac{x^2+1}{x}$

f) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

18 Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$

b) $f(x) = 12x - 3x^2$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

19 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:

a) $y = x^3 + 3x$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \ln x$

20 Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

b) $y = 3x^2 - x^3$

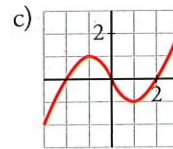
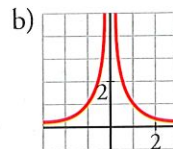
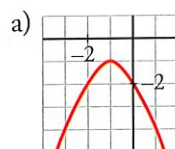
c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \frac{3}{x^2+1}$

f) $y = \frac{x^3+4}{x}$

21 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:



Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que:

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Sus puntos de tangente horizontal son $(-3, 2)$ y $(1, 5)$.

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

23 De una función polinómica sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 solo en $(-2, 2)$ y en $(2, -1)$.
- Corta a los ejes solo en $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

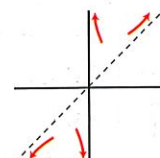
Represéntala gráficamente.

24 Representa una función continua $y = f(x)$ de la que sabemos que:

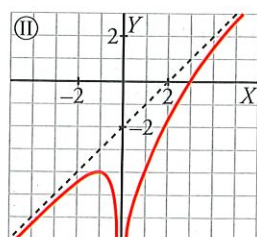
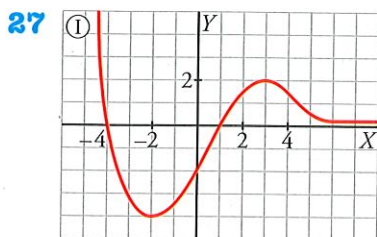
- Sus puntos de tangente horizontal son $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.
- Sus ramas infinitas son así:

25 Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

26 Comprueba que la función $y = \frac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.



Ejercicios y problemas propuestos



Observa estas gráficas y describe:

- Sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.
- Sus puntos singulares, crecimiento y decrecimiento.

28 Dada la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ comprueba que:

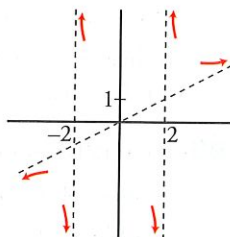
- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- La posición de la curva respecto a la asíntota es:
Si $x \rightarrow -\infty$, $y < 2$
Si $x \rightarrow +\infty$, $y < 2$

Representala.

29 Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right), (0, 0), \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.



30 Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:

- Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Corta al eje X en $x = 1$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0$
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$
- Asíntota vertical: $x = 0$
Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$
Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$
- Mínimo en $(2, -1)$.

31 Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:

- Asíntota vertical: $x = 2$
Si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$
Si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$
- Asíntota oblicua: $y = x/2$
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x/2$
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x/2$
- Cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$

Para resolver

- 32** a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.
b) Halla las coordenadas del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

33 Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

34 Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

35 Halla a , b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

36 La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

37 Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.

38 Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3$

c) $f(x) = 12x - x^3$

d) $f(x) = -x^4 + 4x^2$

39 Estudia y representa.

a) $y = x^3 - 3x + 2$

b) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

40 Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Representalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = \frac{x-3}{x+2}$

b) $y = \frac{x^2-1}{x}$

c) $y = \frac{x^3}{3} + 4x$

d) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

41 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2-16}$

b) $y = \frac{x}{1-x^2}$

c) $y = \frac{x+2}{x^2-6x+5}$

d) $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \frac{x^2-1}{x+2}$

f) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

42 Halla las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

b) $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$

43 Calcula el valor de a para que $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.

44 Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.

45 Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

46 Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

47 Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

48 El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

El coste medio por unidad es: $M(q) = \frac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

49 La función $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Representala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

50 Aplica la regla de L'Hôpital para resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 5x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(2x+1)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + \tan x}$

51 Halla los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)}$

52 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto $(1, 3)$ y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.

53 Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.

a) $y = x^2 - 6x - 4$, $x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$, $x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2$, $x \in [-2, 4]$

d) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in [0, 2]$

54 Halla los máximos y los mínimos de las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

55 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$

b) $y = \frac{x^2}{e^x}$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

d) $y = x \ln x$

56 Prueba que existe un punto de la curva $y = \arctg \frac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

57 Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

58 Calcula, en cada caso, los valores de m y n para que las funciones siguientes sean derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN DE LA MATERIA PENDIENTE MATEMÁTICAS I

ACTIVIDADES DE LA SEGUNDA EVALUACIÓN	
UNIDADES DEL LIBRO	EJERCICIOS PROPUESTOS
Unidad 1	Página 50 y siguientes 7,23, 25,26,27,30,31,32
Unidad 4	Página 124 y siguientes 3,4,6,7,8,20,23,24,27,28,29,36,37,38,42,44,45
Unidad 5	Página 142 y siguientes 1,4,11,13,14,15,16,19,20,22,25,33,41,44
Unidad 6	Página 162 y siguientes 3,5,8,10,13,14,15,16,22,26,34,42,45,48

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

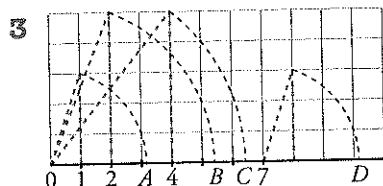
Números racionales e irracionales

- 1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:

$$5; -7; \frac{5}{4}; \sqrt{\frac{18}{2}}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; 4,7; \frac{\pi}{2}$$

- 2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.

- a) 3,181818... b) $\sqrt{1,7}$
c) $\sqrt{8}$ d) 1,020020002...
e) -4,0333... f) $\sqrt[3]{81}$
g) 1,3999... h) 2π



¿Qué números irracionales representan los puntos: A, B, C y D?

Justifica la respuesta.

Intervalos y valor absoluto

- 4 Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.

- a) x es menor que -5.
b) 3 es menor o igual que x .
c) x está comprendido entre -5 y 1.
d) x está entre -2 y 0, ambos incluidos.
e) x es mayor o igual que -3 y menor que 2.

- 5 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:

- a) $[-2, 7]$ b) $[13, +\infty)$ c) $(-\infty, 0)$
d) $(-3, 0]$ e) $[3/2, 6)$ f) $(0, +\infty)$

- 6 Expresa como un único intervalo.

- a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ b) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

- 7 Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:

- a) $|x| < 7$ b) $|x| \geq 5$ c) $|2x| < 8$
d) $|x - 1| \leq 6$ e) $|x + 2| > 9$ f) $|x - 5| \geq 1$

- 8 Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.

- a) $\sqrt{x - 4}$ b) $\sqrt{2x + 1}$ c) $\sqrt{-x}$
d) $\sqrt{3 - 2x}$ e) $\sqrt{-x - 1}$ f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$

- 9 Expresa como un único intervalo.

- a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$
c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

- 10 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

- a) Centro -1 y radio 2 b) Centro 2 y radio 1/3

- 11 Describe como entornos los siguientes intervalos:

- a) $(-1, 2)$ b) $(1, 3; 2, 9)$
c) $(-2, 2; 0, 2)$ d) $(-4; -2, 8)$

Radicales

- 12 Introduce los factores dentro de cada raíz.

- a) $2^3\sqrt{3}$ b) $4^3\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$
d) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{25}{9}}$ e) $2^4\sqrt{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

- 13 Sacar de la raíz el factor que puedas.

- a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1000}$
d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$
g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2 + 4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

- 14 Simplifica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$
d) $\sqrt[12]{\sqrt[4]{4} \cdot 3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$
g) $\sqrt[6]{0,027}$ h) $\sqrt[8]{0,0016}$ i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

- 15 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

- a) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$
c) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[5]{10}$ d) $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[6]{100}$

- 16 Realiza la operación y simplifica, si es posible.

- a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$
d) $(\sqrt[3]{12})^2$ e) $(\sqrt[6]{32})^2$ f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

- 17 Efectúa y simplifica, si es posible.

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$
c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{\sqrt{4}}$

- 18 Expresa con una única raíz.

- a) $\sqrt[4]{\sqrt{4}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

19 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$
 d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

20 Calcula y simplifica.

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$
 b) $\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$
 c) $-\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{294}$

21 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{72}$
 b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$
 c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

22 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$ b) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$
 c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$ d) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

23 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$
 d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

24 Efectúa y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Logaritmos

25 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 1024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$
 d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_2 \sqrt{8}$
 g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$ h) $\log_{\pi} 1$ i) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

26 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$
 c) $\log_x \frac{1}{4} = 2$ d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$
 e) $\log_x 0,04 = -2$ f) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

27 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$ b) $\log x^2 = -2$
 c) $7^x = 115$ d) $5^{-x} = 3$
 e) $\log_7 3x = 0,5$ f) $3^{2+x} = 172$

28 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$ c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$
 d) $\log_3 42,9$ e) $\log_5 1,95$ f) $\log_2 0,034$

29 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

30 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$
 b) $\log x = \log 36 - \log 9$
 c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$
 d) $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

31 Si $\log k = x$, escribe en función de x .

a) $\log 100k$ b) $\log \frac{k}{1000}$ c) $\log k^3$
 d) $\log \sqrt[3]{10k}$ e) $\log \frac{1}{k}$ f) $(\log k)^{1/2}$

32 Averigua, en cada caso, la relación entre x , y , z .

a) $\log z = 2 \log x - \log y$
 b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$
 c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$
 d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

Notación científica y errores

33 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$
 b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$
 c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

34 Expresa en notación científica y calcula.

$\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

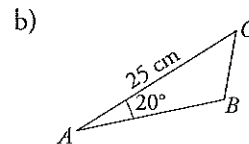
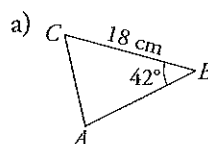
- Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos α , β y γ .
a) $\cos \alpha = \sqrt{5}/3$ b) $\sin \beta = 3/5$ c) $\operatorname{tg} \gamma = 3$
- Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala calculando las razones trigonométricas que faltan en cada caso:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	0,3		
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$		-0,6	
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$			2
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$			$-\sqrt{5}$

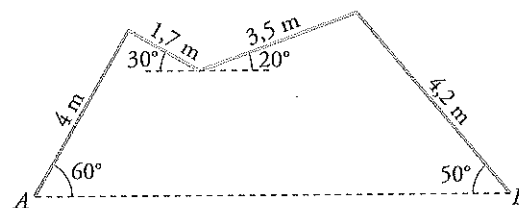
- Halla, en cada caso, las razones trigonométricas de α :
a) $\sin \alpha = -2/3$; $\cos \alpha < 0$ b) $\cos \alpha = 5/6$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$
c) $\operatorname{tg} \alpha = 2,25$; $\sin \alpha < 0$ d) $\cos \alpha = -\sqrt{5}/4$; $\sin \alpha < 0$
- Sabiendo que $\cos \alpha = 0,8$ y $\sin \alpha = 0,6$ calcula:
a) $\cos (180^\circ + \alpha)$ b) $\sin (180^\circ - \alpha)$
c) $\operatorname{tg} (-\alpha)$ d) $\sin (90^\circ - \alpha)$
e) $\cos (90^\circ + \alpha)$ f) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$
- Si sabemos que $\sin 42^\circ = 0,67$, $\cos 42^\circ = 0,74$ y $\operatorname{tg} 42^\circ = 0,9$, di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:
a) $\cos 48^\circ$ b) $\sin (-48^\circ)$ c) $\sin 138^\circ$
d) $\operatorname{tg} 318^\circ$ e) $\cos 222^\circ$ f) $\operatorname{tg} 858^\circ$
- Expresa con un ángulo del primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:
a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 240^\circ$ c) $\operatorname{tg} 120^\circ$
d) $\cos 1845^\circ$ e) $\operatorname{tg} 1125^\circ$ f) $\sin (-120^\circ)$
- Halla con la calculadora el valor del ángulo α :
a) $\sin \alpha = -0,75$; $\alpha < 270^\circ$
b) $\cos \alpha = -0,37$; $\alpha > 180^\circ$
c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,38$; $\sin \alpha < 0$
d) $\cos \alpha = 0,23$; $\sin \alpha < 0$
- a) Representa un ángulo α tal que $\cos \alpha = -\frac{3}{8}$ y $\sin \alpha < 0$.
Halla $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.
b) Di el valor de las razones siguientes:
 $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$; $\cos (90^\circ - \alpha)$; $\sin (180^\circ + \alpha)$
 $\sin (-\alpha)$; $\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)$; $\cos (360^\circ - \alpha)$

Resolución de triángulos rectángulos

- Para llegar a una altura de 3 m, apoyamos una escalera formando un ángulo de 60° con el suelo. Halla la longitud de la escalera y la distancia desde su base hasta la pared.
- Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 85 cm. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?
- Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.
- En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40° . Halla el perímetro y el área del triángulo.
- Calcula la altura trazada desde C en cada uno de los triángulos siguientes:



- Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta r con la que forma un ángulo α :
a) $\alpha = 20^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$ c) $\alpha = 80^\circ$
- Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65° .
- El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.



- Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40° . Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?
- En un triángulo ABC , rectángulo en A , se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:
 $\overline{AC} = 15$ m $\overline{AD} = 12$ m
Halla los lados y los ángulos del triángulo.
- Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.

Resolución de triángulos cualesquiera

20 Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo ABC en los siguientes casos:

- $\hat{A} = 55^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 15$ m
- $\hat{A} = 50^\circ$, $a = 23$ m, $c = 18$ m
- $\hat{A} = 35^\circ$, $\hat{C} = 42^\circ$, $b = 17$ m
- $\hat{B} = 105^\circ$, $b = 30$ m, $a = 18$ m

21 Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC , en el que $\hat{A} = 48^\circ$, $b = 27,2$ m y $c = 15,3$ m.

22 Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m y $c = 35$ m.

23 Resuelve los siguientes triángulos:

- $b = 32$ cm, $a = 17$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$
- $a = 85$ cm, $c = 57$ cm, $\hat{B} = 65^\circ$
- $a = 23$ cm, $b = 14$ cm, $c = 34$ cm

24 Resuelve los siguientes triángulos:

- $a = 100$ m, $\hat{B} = 47^\circ$, $\hat{C} = 63^\circ$
- $b = 17$ m, $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$
- $a = 70$ m, $b = 55$ m, $\hat{C} = 73^\circ$
- $a = 122$ m, $c = 200$ m, $\hat{B} = 120^\circ$
- $a = 25$ m, $b = 30$ m, $c = 40$ m
- $a = 100$ m, $b = 185$ m, $c = 150$ m
- $a = 15$ m, $b = 9$ m, $\hat{A} = 130^\circ$
- $b = 6$ m, $c = 8$ m, $\hat{C} = 57^\circ$

Para resolver

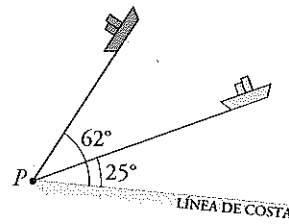
25 El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?

26 Dos senderos rectos se cruzan formando un ángulo de 60° . En uno de ellos, a un kilómetro del cruce, hay una fuente. ¿Cuál es la distancia más corta que hay desde la fuente al otro sendero si vamos campo a través?

27 Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.

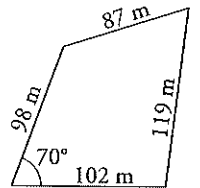
28 Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y el faro, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del promontorio.

29



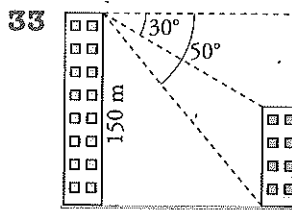
Dos barcos salen simultáneamente de un punto P con rumbos de 62° y 25° respecto a la línea de costa. El primero lleva una velocidad de 7,5 nudos, y el otro, de 9 nudos. ¿Cuál será la distancia entre ellos al cabo de una hora de navegación?

30 Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?



31 Dos fuerzas de 18 N y 30 N actúan sobre un punto formando un ángulo de 45° . Calcula la intensidad de la resultante y el ángulo que forma con cada una de las fuerzas.

32 Desde un punto P observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30° . Quince segundos después, el ángulo es de 55° . Si el avión vuela a 3 000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?



Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.

34 Dos circunferencias secantes tienen radios de 6 cm y 10 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 40° . Calcula la distancia entre sus centros.

35 En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. ¿Cuál es el ángulo correspondiente a esa cuerda?

36 Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

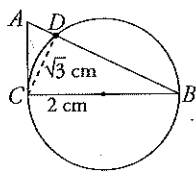
37 Calcula el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de 15 cm de radio.

38 De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50° . Calcula el área y el perímetro del trapecio.

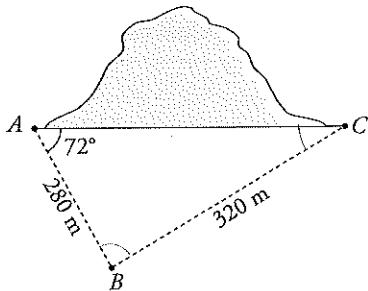
39 En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC , y desde D , otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN .

Ejercicios y problemas propuestos

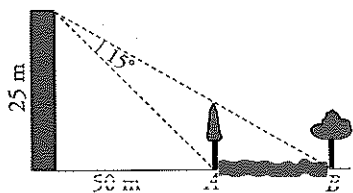
- 40 El triángulo ABC es rectángulo en C . Sabemos que el radio de la circunferencia mide 2 cm y $\overline{CD} = \sqrt{3}$ cm. Calcula $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.



- 41 Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

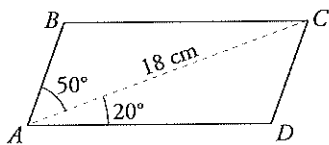


- 42 Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15° . Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.

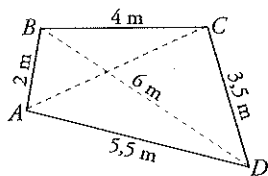


- 43 En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

- 44 Calcula, en este paralelogramo $ABCD$, el área, las longitudes de los lados y la longitud de la otra diagonal:



- 45 En un cuadrilátero $ABCD$ conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD . Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal AC .



- 46 Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75° . Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.

- 47 Dos árboles C y D se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos A y B , situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:

$$\overline{AB} = 100 \text{ m} \quad \widehat{CAB} = 82^\circ \quad \widehat{DAB} = 40^\circ \\ \widehat{DBA} = 32^\circ \quad \widehat{CBA} = 25^\circ$$

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.

- 48 Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:

- a) $a = 3 \text{ m}$; $b = 8 \text{ m}$; $\hat{A} = 25^\circ$
 b) $a = 12,6 \text{ m}$; $b = 26,4 \text{ m}$; $\hat{B} = 124^\circ 34'$
 c) $a = 82,6 \text{ m}$; $b = 115 \text{ m}$; $\hat{A} = 28^\circ 4'$

Cuestiones teóricas

- 49 Si $\sin \alpha = m$ y α es un ángulo obtuso, expresa en función de m :

- a) $\cos \alpha$ b) $\operatorname{tg} \alpha$ c) $\cos (180^\circ - \alpha)$ d) $\operatorname{tg} (-\alpha)$

- 50 Demuestra que en un triángulo ABC , rectángulo en A , se verifica:

- a) $\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \cos^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{C}$
 b) $\sin \hat{B} - \cos \hat{C} = 0$
 c) $\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 1$

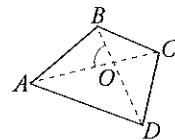
- 51 ¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2 \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$? Justifícalo.

- 52 Prueba que en cualquier paralelogramo de lados a y b y diagonales c y d , se verifica:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

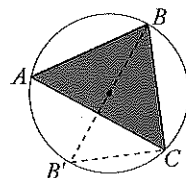
* Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.

- 53 Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.



* Ten en cuenta que: $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$

- 54



Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

* Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y $BB'C$.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

■ Fórmulas trigonométricas

1 Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula sin hallar el valor de α :

- a) $\sin 2\alpha$ b) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$
c) $\sin(\alpha + 30^\circ)$ d) $\cos(60^\circ - \alpha)$
e) $\cos \frac{\alpha}{2}$ f) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$

2 Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ a partir de las de 45° .

3 Si $\cos 78^\circ = 0,2$ y $\sin 37^\circ = 0,6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115° .

4 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45° .
b) Utilizando los resultados del apartado anterior, calcula las razones trigonométricas de: 105° ; 165° ; 15° ; 195° y 135° .

5 Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α , y simplifica las siguientes expresiones:

- a) $\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(\alpha - 45^\circ)$
b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$
c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha + \cos 2\alpha$
d) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$

6 Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{-7}{25}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ ($180^\circ < \beta < 270^\circ$), calcula $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

7 Si $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270^\circ$, halla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

8 Si $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90^\circ$, halla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

9 Expresa en función de α y simplifica esta expresión:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin(90^\circ - \alpha)$$

10 Transforma las siguientes sumas en productos:

- a) $\sin 65^\circ + \sin 35^\circ$ b) $\sin 65^\circ - \sin 35^\circ$
c) $\cos 48^\circ + \cos 32^\circ$ d) $\cos 48^\circ - \cos 32^\circ$
e) $\frac{1}{2} + \sin 50^\circ$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 75^\circ$

■ Identidades trigonométricas

11 Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:

- a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 4 \sin \alpha \cos \alpha$
b) $\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha$
c) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$
d) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$

12 Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:

- a) $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$
b) $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

13 Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:

- a) $\sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta$
b) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

* En b), divide numerador y denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$.

14 Demuestra.

- a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$
b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

15 Demuestra.

- a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$
b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

16 Demuestra las siguientes igualdades:

- a) $\frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$
b) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$
c) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$
d) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$
e) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

17 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.

- a) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$
b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

■ Ecuaciones trigonométricas

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$ b) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$
 c) $1 - 4 \cos^2 x = 0$ d) $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0$

19 Resuelve estas ecuaciones:

- a) $2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$
 b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$
 c) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

20 Resuelve.

- a) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$
 b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$
 c) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$
 d) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$
 b) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$
 c) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$
 d) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

22 Resuelve.

- a) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$
 b) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$
 c) $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$
 d) $4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

23 Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $\operatorname{tg} x$ y resuélvelas:

- a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$
 b) $\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$
 c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

24 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \cos (x - \pi) = 2$
 b) $\cos \left(\frac{5\pi}{6} - x \right) + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$
 c) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 1$
 d) $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 1$

25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$
 b) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$
 c) $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$
 d) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$
 e) $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$
 f) $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$
 g) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} x = 1$

■ Ángulos en radianes

26 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 3,2$$

27 Pasa a radianes los siguientes ángulos. Exprésalos en función de π :

$$135^\circ; 210^\circ; 108^\circ; 72^\circ; 126^\circ; 480^\circ$$

28 Prueba que:

- a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 2$
 b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$
 c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

29 Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

- a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$
 b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$
 c) $\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$
 d) $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

30 Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

- a) 0,8 rad b) 3,2 rad c) 2 rad d) 4,5 rad
 e) $\pi/8$ rad f) $7\pi/4$ rad g) $3\pi/5$ rad h) $1,2\pi$ rad

* Ten en cuenta que: $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $\pi \approx 3,14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; $2\pi \approx 6,28$.

31 En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,32$ b) $\cos \alpha = 0,58$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$ d) $\operatorname{sen} \alpha = -0,63$

Ejercicios y problemas propuestos

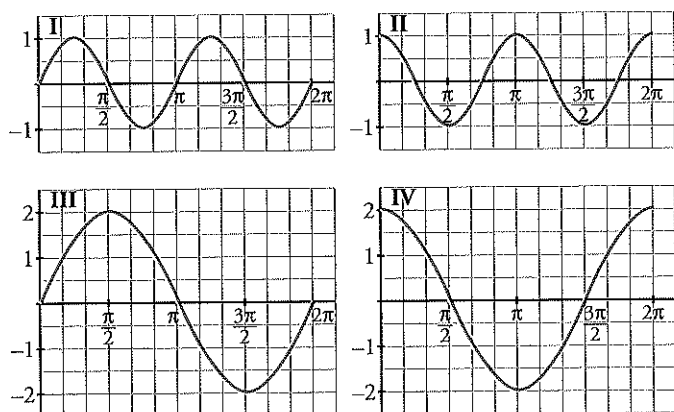
Para resolver

32 Representa las siguientes funciones trigonométricas:

- a) $y = -\sin x$ b) $y = 1 + \sin x$
c) $y = -\cos x$ d) $y = 1 + \cos x$

33 Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le corresponde:

- a) $y = 2 \sin x$ b) $y = \cos 2x$
c) $y = 2 \cos x$ d) $y = \sin 2x$



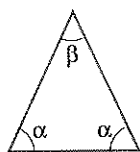
34 Halla los puntos de corte de las funciones $y = \sin x$ e $y = \tan x$.

35 En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.

36 En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

37 Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.

38 Si en este triángulo isósceles sabemos que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sin hallar el ángulo α , el valor de $\cos \beta$.



39 En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45^\circ$ y $\cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.

40 Si $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, sin hallar el ángulo α .

41 Demuestra estas igualdades:

- a) $\frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} = \cos 2\alpha$
b) $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)$
c) $\cos 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha = 1$

42 Simplifica:

- a) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$
b) $\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha$

43 Resuelve estas ecuaciones:

- a) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$ b) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$
c) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$ d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

44 a) Demuestra que $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$.
b) Resuelve la ecuación $\sin 3x - 2 \sin x = 0$.

45 Demuestra las siguientes igualdades:

- a) $\sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$
b) $\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$

46 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

- a) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$
c) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x \cos y = 1 \end{cases}$

47 Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

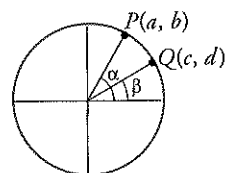
- a) $\sin (x - 60^\circ) = \sin 2x$
b) $\cos (x - 45^\circ) = \cos (2x + 60^\circ)$
c) $\sin (x + 60^\circ) = \cos (x + 45^\circ)$
d) $\cos (2x - 30^\circ) = \cos (x + 45^\circ)$

48 En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β . Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.

a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a $\sin \gamma$?

- I. $ac + bd$ II. $bc - ad$ III. $ad - bc$ IV. $ab + cd$

b) ¿Alguna de ellas es igual a $\cos \gamma$?



Ejercicios y problemas propuestos

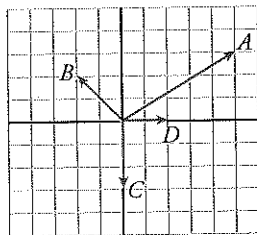
Para practicar

Números complejos en forma binómica. Operaciones

1 Calcula.

- $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$
- $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$
- $-2i - (4 - i)5i$
- $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

2 Los puntos A, B, C, D corresponden a los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4 .



Efectúa y representa.

- $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$
- $(z_2 - z_1)^2$
- $\frac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3}$
- $\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_3 + z_4}$

3 Calcula en forma binómica.

- $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$
- $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$
- $\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$
- $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

4 Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:

- zwt
- $zt - w(t + z)$
- $\frac{w}{z}t$
- $\frac{2z - 3t}{w}$
- $\frac{3z + it}{3}w$
- $\frac{z^2 - wt^2}{2}$

5 Calcula.

- i^{37}
- i^{126}
- i^{-7}
- i^{64}
- i^{-216}

6 Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

- $1 + z + z^2 = 0$
- $\frac{1}{z} = z^2$

7 Calcula m y n para que se verifique la igualdad $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.

8 Determina k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2 - i$.

9 Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8 + 4i$.

Números complejos en forma polar

10 Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:

- $1 - i$
- $-1 + i$
- $\sqrt{3} + i$
- $-\sqrt{3} - i$
- -4
- $2i$
- $-\frac{3}{4}i$
- $2 + 2\sqrt{3}i$

11 Escribe en forma binómica estos números complejos:

- 2_{45°
- $3_{(\pi/6)}$
- $\sqrt{2}_{180^\circ}$
- 17_0°
- $1_{(\pi/2)}$
- 5_{270°
- 1_{150°
- 4_{100°

12 Dados los números complejos: $z_1 = 2_{270^\circ}$, $z_2 = 4_{120^\circ}$, $z_3 = 3_{315^\circ}$, calcula:

- $z_1 \cdot z_2$
- $z_2 \cdot z_3$
- $z_1 \cdot z_3$
- $\frac{z_3}{z_1}$
- $\frac{z_2}{z_1}$
- $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$
- z_1^2
- z_2^3
- z_3^4

13 Expresa en forma polar y calcula.

- $(-1 - i)^5$
- $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$
- $\sqrt[6]{64}$
- $\sqrt[3]{8i}$
- $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$
- $(3 - 4i)^3$

14 Calcula y representa gráficamente el resultado.

- $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$
- $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

15 Calcula y representa las soluciones.

- $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$
- $\sqrt[4]{-16}$
- $\sqrt[3]{-27i}$

16 Calcula pasando a forma polar.

- $(1 + i\sqrt{3})^5$
- $\frac{8}{(1-i)^5}$
- $\sqrt[6]{-64}$
- $\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}$

17 Expresa en forma polar z , su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:

- $z = 1 - \sqrt{3}i$
- $z = -2 - 2i$
- $z = -2\sqrt{3} + 2i$
- $z = -5$
- $z = 7i$
- $z = -3 - 4i$

18 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

- $\sqrt[5]{i}$
- $\sqrt[6]{-1}$
- $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

19 Calcula $\bar{z}^5$ y $\sqrt[4]{\bar{z}}$, siendo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

■ Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

20 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 + z + 4 = 0$
 c) $z^2 + 3z + 7 = 0$ d) $z^2 - z + 1 = 0$

21 Resuelve estas ecuaciones:

a) $z^5 + 32 = 0$ b) $iz^3 - 27 = 0$
 c) $z^3 + 8i = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

22 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
 c) $2z^2 + 10 = 0$ d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

23 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$ b) $z^4 + 16 = 0$ c) $z^4 - 8z = 0$

24 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$ b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$
 c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Para resolver

25 Calcula a y b de modo que se verifique:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

26 Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:

a) imaginario puro. b) real.

27 Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

28 Calcula x para que el resultado de $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

29 Calcula el valor que debe tener a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

30 La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2 y el cociente entre este y el segundo es un número real. Hallalos.

31 Si $z = (i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{10})(3 + ki)$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.

32 ¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$?

33 Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.
 * Llámalos r_α y s_β y escribe las condiciones que los relacionan.

34 El producto de dos números complejos es 2_{90° y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_0$. Hallalos.

35 El producto de dos números complejos es -27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Calcúlalos.

36 Halla, en función de x , el módulo de $z = \frac{1+xi}{1-xi}$.
 Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x .

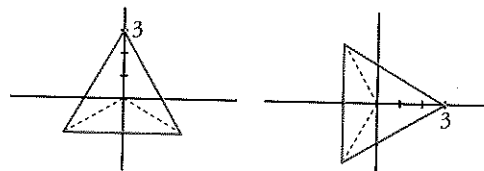
37 Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.

38 Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.

39 Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$. ¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?

Compruébalo y representa los resultados obtenidos.

40 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.



41 ¿Pueden ser las raíces de un complejo z los números 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° ? En caso afirmativo, halla z .
 * Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.

42 El número complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

43 Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

44 Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.

45 Calcula el valor que debe tener b para que el módulo de $\frac{-3+bi}{1-2i}$ sea igual a $\sqrt{2}$.

46 Expresa $\cos 4\alpha$ y $\sin 4\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Ejercicios y problemas propuestos

- 47 Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.
- 48 El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.
- 49 ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

- 50 Sean A , B , C , D los afijos de los números $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.
- a) ¿Cuáles son las coordenadas de A , B , C , D ?
- b) Calcula $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_2|$; $d_2 = |z_2 - z_3|$ e interpreta geoméricamente estos números.
- c) ¿Cuánto mide la línea poligonal $ABCD$?

- 51 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

- a) $1 + i$ y $1 - i$ b) $5i$ y $-5i$
c) $2 - 3i$ y $2 + 3i$ d) $4 - i$ y $1 + 2i$

- 52 Halla el valor que debe tener m para que $1 - 2i$ sea una solución de la ecuación $z^2 - mz + 5 = 0$.

- 53 Resuelve estas ecuaciones:

- a) $2z + 3i - 2 = 3 + zi$ b) $(5 + i)z = 3z + 4i - 2$
c) $(1 - i)z^2 - 1 + i$ d) $(i^{23} - i^{37})z = 2i^{22} - 3i^{19}$

- 54 Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$

- 55 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

- 56 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $z^3 + z^2 - 2 = 0$ b) $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$
c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$ d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

- 57 Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

- 58 Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:

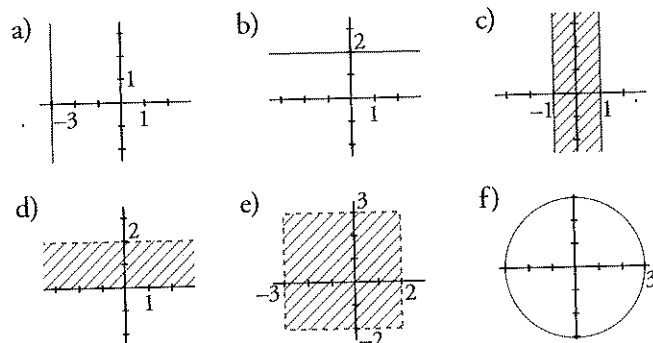
- a) $Re\ z = 2$ b) $Im\ z = 1$
c) $Re\ z \leq 0$ d) $-1 \leq Im\ z \leq 3$
e) $-2 < Re\ z < 5$ f) $|z| \leq 3$
g) $Arg\ z = 45^\circ$ h) $0^\circ \leq Arg\ z \leq 90^\circ$

- 59 Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.
* Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.

- 60 Representa los números complejos que verifican:

- a) $\bar{z} = -z$ b) $|z + \bar{z}| = 3$ c) $|z - \bar{z}| = 4$

- 61 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:



* En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.

Cuestiones teóricas

- 62 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0° ?
- 63 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?
- 64 Comprueba que:
- a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
c) $\overline{kz} = k\bar{z}$, con $k \in \mathbb{R}$
- 65 Demuestra que $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.
- 66 El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.



ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN DE LA MATERIA PENDIENTE MATEMÁTICAS I

ACTIVIDADES DE LA TERCERA EVALUACIÓN	
UNIDADES DEL LIBRO	EJERCICIOS PROPUESTOS
Unidad 7	Página 183 y siguientes 13,14,15,21,23,25,28,29,30,31,32,40
Unidad 8	Página 209 y siguientes 3,4,6,7,10,13,21,22,25,26,28,30,33,34,35,36,37,39,40,41, 42,46,49,50,54,58,59,60,67,69,77,78,82,87
Unidad 9	Página 237 1,2,3,5,8,9,10

11 Dados los vectores $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ b) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

12 Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

13 Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

14 Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}(4, -\frac{1}{2})$.

15 En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.

■ Producto escalar. Módulo y ángulo

16 Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$ c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

17 De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:

$\vec{u}(-1, 1)$; $|\vec{v}| = 1$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$; $\vec{w} \perp \vec{v}$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

18 En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F . Calcula los productos:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

19 Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$
c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

20 Si A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $2\overrightarrow{AB} \cdot (-3\overrightarrow{AC})$
c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$ d) $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$

21 Comprueba si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{u}(0, 1)$, $\vec{v}(2, 4)$ b) $\vec{u}(0, 7)$, $\vec{v}(-5, 0)$
c) $\vec{u}(2, 5)$, $\vec{v}(5, 2)$ d) $\vec{u}(3, 6)$, $\vec{v}(-2, 1)$

22 Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.

a) $\vec{u}(0, 3)$ b) $\vec{u}(-5, 0)$ c) $\vec{u}(3, 8)$ d) $\vec{u}(-1, -1)$

23 Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$ b) $\vec{u}(\frac{1}{5}, -2)$, $\vec{v}(k, 3)$
c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$ d) $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

24 Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

25 Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}(\frac{3}{5}, m)$ sea igual a 1.

26 Dada la base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores unitarios tales que:

- a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B .
b) Los vectores de B' sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

27 Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

- a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.
b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

28 Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:

- a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.
b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.
c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u}$.

29 Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.

30 Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$
b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$
c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}(-\frac{1}{2}, -3)$

31 Dados $\vec{u}(\frac{1}{2}, k)$ y $\vec{v}(\frac{1}{2}, 0)$, calcula k para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 60° .

32 Calcula x , de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

33 Calcula la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ y representa gráficamente cada situación.

a) $\vec{u}(3, 0)$ y $\vec{v}(3, 4)$
b) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(-4, 2)$
c) $\vec{u}(-2, -5)$ y $\vec{v}(5, -2)$

Ejercicios y problemas propuestos

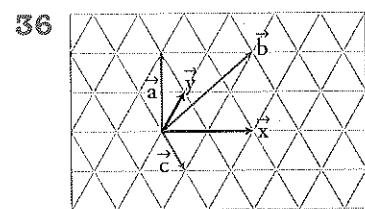
Para resolver

34 Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $B = (\vec{u}, \vec{v})$ es una base.
- Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.
- Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.
- $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, pero distinta dirección.
- El módulo de $-3\vec{v}$ es el triple que el módulo de $\vec{v}$.

35 ¿Cómo es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos?:

- $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$
- $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$
- $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$



36 Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

37 Sean A , B y C los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?

38 Sean A , B , C y D los vértices de un cuadrilátero. Señala, en cada caso, las condiciones que deben cumplir los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$ para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un:

- Cuadrado.
- Paralelogramo.
- Trapezio isósceles.
- Trapezio escaleno.

39 Sean $\vec{a}(-6, 8)$ y $\vec{b}(3, 4)$. Halla, en cada caso, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}|$
- $|\vec{c}| = 1$
- $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

40 Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b , en cada caso, de modo que:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{u}| = \sqrt{10}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ y $|\vec{v}| = 17$

41 Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

42 Calcula la proyección de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ y $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$.

43 De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120° . Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.

44 Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.

45 Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

46 Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

47 Sea $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x} + \vec{y}|$ y $|\vec{x} - \vec{y}|$.

48 Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

49 Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45° .

50 Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.

51 Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30° .

52 Halla un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 60° con el vector $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$ y tenga como módulo la mitad del módulo de $\vec{b}$.

53 De una base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

* Mira el problema resuelto número 1.

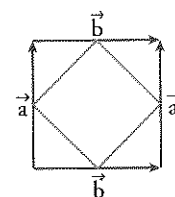
54 Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.

55 Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

56 Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.

57 Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?

58 Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.



* Mira el problema resuelto número 5.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

■ Coordenadas de puntos

- Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo:
 - $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$
 - $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$
- Determina si los puntos $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ y $C(-5, -2)$ están alineados.
- Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.
- Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:
 - M , punto medio de A y B .
 - S , simétrico de A respecto a B .
 - P , tal que A sea el punto medio del segmento BP .
- Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.
- Determina los puntos que dividan al segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(-2, 1)$ y $B(5, 4)$.
- Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.
- Conocemos tres vértices de un rombo $ABCD$, $A(3, 5)$, $B(2, -2)$ y $C(7, 3)$. Determina el vértice D .
** Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares.*

■ Ecuaciones de rectas

- Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por A y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}$.
 - $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$
 - $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$
 Obtén 2 puntos más para cada recta.
- Escribe la ecuación de la recta que pasa por P y Q de todas las formas posibles.
 - $P(6, -2)$ y $Q(0, 5)$
 - $P(3, 2)$ y $Q(3, 6)$
 - $P(0, 0)$ y $Q(8, 0)$
 - $P(0, 0)$ y $Q(0, -2)$
- Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.
- Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:
 - $r: \frac{x+1}{-2} = y - 1$
 - $s: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

- Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:
 - $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$
 - $r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{4}$
 - $r_3: x + 3 = 0$
 - $r_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

- Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.

- $3x - 2y + 1 = 0$
- $y = 2(x - 1) + 7$
- $x - 3 = 0$
- $y = \frac{2}{3}x + 1$

- Comprueba si el punto $P(5, -7)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:

- $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases}$
- $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5}$

- Halla el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5, -2)$.

■ Haz de rectas

- Consideramos el haz de rectas de centro $(3, -2)$.
 - Escribe la ecuación de este haz de rectas.
 - ¿Qué recta de este haz pasa por el punto $(-1, 5)$?
 - ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?
 - Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.
- Determina el centro del haz de rectas de ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.
- Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. ¿Qué recta de dicho haz tiene pendiente -2 ?

■ Paralelismo y perpendicularidad

- El vector dirección de r es $\vec{d}(2, -5)$. Halla, en cada caso, el vector dirección y la pendiente de:
 - Una recta paralela a r .
 - Una recta perpendicular a r .
- Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:
 - Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.
 - Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.
- De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso:
 - s es paralela a r y pasa por $(0, 0)$.
 - s es perpendicular a r y pasa por $(1, 2)$.

Ejercicios y problemas propuestos

23 Halla una recta que pase por el punto $P(0, 1)$ y sea perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{3}$.

24 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3)$ y es:

- Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.
- Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.
- Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.
- Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

25 El vector normal de la recta r es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta s .

- s es paralela a r y contiene al punto $P(2, -3)$.
- s es perpendicular a r y pasa por $Q(0, 1)$.

26 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:

- r_1 , paralela al eje de abscisas que pasa por $A(-1, -2)$.
- r_2 , perpendicular al eje OX que contiene a $B(1, 0)$.
- r_3 , paralela al eje de ordenadas que pasa por $C(3, 5)$.
- r_4 , perpendicular al eje OY que contiene a $D(-1, 7)$.

27 Halla la ecuación de la paralela a $2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2 .

28 Dados los puntos $A(0, 1)$ y $B(4, -3)$ halla la ecuación implícita de la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.

29 Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

30 Determina, en cada caso, una recta que pase por el punto $P(-2, -3)$ y sea:

- Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
- Perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

31 De un triángulo conocemos el vértice $A(1, 3)$ y la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ que contiene al lado BC . Halla la altura relativa al vértice A .

32 Calcula las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ y $C(3, 4)$.

33 Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:

- Paralela al eje OX .
- Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

34 Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

* Mira el problema resuelto número 2.

Posición relativa de dos rectas

35 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.

a) $r: 5x + y + 7 = 0$; $s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0$; $s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1$; $s: y = \frac{-1}{2}x + 1$

36 Calcula el valor de los parámetros k y t para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1, 2)$:

$r: kx - ty - 4 = 0$ $s: 2tx + ky - 2 = 0$

37 Determina k para que las rectas r y s sean paralelas.

$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2}$ $s: \frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k}$

38 Halla el valor de k para que estas rectas sean coincidentes:

$r: 2x + 3y + 5 = 0$ $s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$

39 Calcula k para que r y s sean perpendiculares.

$r: y = 2x + 1$ $s: 3x + ky + 3 = 0$

Ángulos

40 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: y = 2x + 5$ $s: y = -3x + 1$ b) $r: 3x - 5y + 7 = 0$ $s: 10x + 6y - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$ d) $r: 2x - y = 0$ $s: 2y + 3 = 0$

41 ¿Qué ángulo forma $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?

* La pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de la recta.

42 ¿Qué ángulo forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de ordenadas?

43 Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX .

44 Calcula m y n en estas rectas sabiendo que r pasa por el punto $P(1, 4)$ y que r y s forman un ángulo de 45° :

$r: mx - 2y + 5 = 0$ $s: nx + 6y - 8 = 0$

45 Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Representalo y halla sus ángulos.

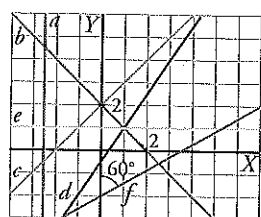
Distancias y áreas

- 46 Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.
- 47 Determina, en cada caso, si el triángulo ABC es equilátero, isósceles o escaleno.
- $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$
 - $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$
 - $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$
- 48 Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.
- 49 Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:
- $3x - 4y + 5 = 0$
 - $2x + 5 = 0$
 - $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}$
 - $(x, y) = \left(\frac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)k$
- 50 Determina c para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).
- 51 Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:
- $r: 3x + 5 = 0$; $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$
 - $r: y = \frac{-2}{3}x + 1$; $r': \frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$
- 52 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.
- 53 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B .
- 54 Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.

Para resolver

- 55 Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.
- 56 En un triángulo equilátero conocemos dos vértices, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ y $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Halla el tercer vértice.

- 57 Halla las ecuaciones de las rectas a , b , c , d , e y f .



- 58 Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Halla el ortocentro.
- 59 Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Halla el circuncentro.
- 60 En el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ y $C(3, 7)$, determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.
- 61 En un triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 0)$ trazamos desde cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Halla los vértices del triángulo que determinan los puntos de corte de estas rectas y comprueba que es semejante a ABC .
- * Para comprobar que dos triángulos son semejantes, basta ver que sus ángulos son iguales.
- 62 La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, el segmento AB . Halla la ecuación de la mediatriz de AB .
- 63 Halla el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta $r: x - 2y + 4 = 0$.
- * Escribe la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte con r .
- 64 De un rombo $ABCD$ sabemos que los vértices B y D están en la recta $r: y = 2x + 2$ y que $A(4, 0)$. Halla las coordenadas de C .
- 65 Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r: x = 3$; $s: 2x + 3y - 6 = 0$ y $t: x - y - 7 = 0$.
- 66 Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4, 3)$, $B(0, 5)$, $C(4, -2)$ y $D(-3, -2)$.
- 67 El lado desigual del triángulo isósceles ABC , tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.
- 68 Calcula c para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.
- 69 Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.
- 70 Determina, en cada caso, un punto P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:
- La distancia de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.
 - P diste 3 unidades del eje OX .
 - La distancia de P al eje OY sea 4 unidades.
 - P equidiste de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$.

Ejercicios y problemas propuestos

71 Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.

72 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta $x + 5y - 6 = 0$.

$$r: 3x - y - 9 = 0 \quad s: x - 3 = 0$$

73 Dadas $r: 2x - y - 17 = 0$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula k para que r y s se corten formando un ángulo de 60° .

74 Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.

75 Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2)$ y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.

76 La recta $2x + y = 0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

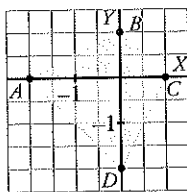
77 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.

78 Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.

79 Halla la recta, t , simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.

80 La recta $b: y = -x + 4$ es la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x + y - 8 = 0$ y s . Halla la ecuación de s .

81 Sean A , B , C y D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.



82 De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d: x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A(2, -1)$. Calcula el resto de vértices y su área.

83 La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto $(0, 5)$ determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.

84 La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Halla las coordenadas del otro extremo.

85 Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $PQRS$ con centro en el punto $(0, 0)$. Halla los vértices R y S y los ángulos del paralelogramo.

86 Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto $(6, 0)$. Halla los otros vértices.

87 En un triángulo, baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler. Compruébalo en el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ y $C(6, 5)$.

88 De un triángulo conocemos dos vértices, $A(0, 0)$ y $B(5, 0)$ y la longitud del lado AC , 3. Además, la tangente del ángulo formado por los lados AB y AC es $\frac{4}{3}$.

a) Calcula la ecuación del lado AC .

b) Determina el vértice C .

c) Halla la longitud de la altura relativa a C .

d) Obtén el área del triángulo.

* Puedes calcular la altura utilizando razones trigonométricas.

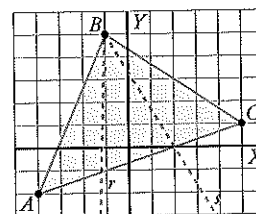
89 Los puntos $A(-\sqrt{3}, -3)$, $B(\sqrt{3}, -3)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $D(\sqrt{3}, 3)$, $E(-\sqrt{3}, 3)$ y $F(-2\sqrt{3}, 0)$ son los vértices de un hexágono regular $ABCDEF$. Calcula:

a) El centro del hexágono como la intersección de las mediatrices de dos lados consecutivos.

b) La longitud de la apotema.

c) El área del polígono.

90 Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y cortan a AC , dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.



91 Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$. Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.

92 Un punto P , que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P ?

93 De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.

94 Halla el punto de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Lugares geométricos

- Halla, en cada caso, la mediatriz del segmento AB .
a) $A(5, -1)$ $B(-3, 1)$ b) $A(3, 6)$ $B(-1, 6)$
Comprueba que es una recta perpendicular a AB .
- Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?
- Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.
- Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s . Interpreta el resultado.
 $r: 3x - 5y + 11 = 0$ $s: 3x - 5y + 3 = 0$
- Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s :
 $r: 4x - 3y + 8 = 0$ $s: 12x + 5y - 7 = 0$

Circunferencias

- Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A es d .
a) $A(0, 5)$ y $d = 2$ b) $A(0, 0)$ y $d = 1$
c) $A(-2, 0)$ y $d = \frac{1}{2}$ d) $A(-1, -5)$ y $d = \frac{3}{5}$
- Halla el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a los puntos $A(0, 6)$ y $B(0, 3)$ es 2, es decir:
$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, B)} = 2$$

Da, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r .

- $C(0, 0)$ y $r = 1$ b) $C(2, -3)$ y $r = 2$
- $C(-1, 0)$ y $r = \frac{2}{3}$ d) $C(0, 3)$ y $r = \frac{5}{4}$

Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

- $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$
- $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
- $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

- Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $(0, -\frac{1}{3})$ y tiene centro en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

- Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -5)$ y cuyo diámetro es igual a 10.
- Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1, -2)$ y por $B(2, -1)$ y tiene radio 1.
- Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos $A(3, -2)$ y $B(7, 0)$. Halla la ecuación de la circunferencia.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ y $C(4, -8)$.
* Mira el ejercicio resuelto 1.
- Da la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $(2, -5)$ y es tangente al eje de abscisas.
- Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto $(3, -4)$ y que es tangente al eje de ordenadas.
- Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$.
- Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$ en el punto $A(-2, 1)$.

Posiciones relativas de rectas y circunferencias

- Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?
- Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:
 $r_1: x + y - 1 = 0$ $r_2: 3x - 4y + 9 = 0$
- Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ respecto a cada una de las siguientes rectas:
 $r_1: x - 2 = 0$ $r_2: y = 0$ $r_3: y = 2x + 1$
Utiliza, en cada caso, los dos métodos siguientes:
a) Resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por la circunferencia y cada recta.
b) Comparando la medida del radio con la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.
- Estudia la posición relativa de la recta $y = x + b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en función del parámetro b .
- Determina la posición relativa de la recta $y = 2x - 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a$ en función del valor del parámetro a .